Frazioni sul filo

Proposte e strategie per la scuola primaria

Elisabetta Robotti
Università della Valle d'Aosta

Le frazioni sono da sempre, e non solo in Italia, una parte fondamentale del curriculum di matematica della scuola primaria. Nonostante ciò, il significato di frazione costituisce una difficoltà per gli alunni anche di livelli scolari superiori e, spesso, è vissuto dagli insegnanti come difficile da costruire. Lo dimostrano le prove di valutazione nazionale (INVALSI) di cui citeremo, in seguito, alcuni risultati.

L'approccio al significato di frazione nella scuola primaria dei diversi Paesi sembra avere una caratteristica comune: richiede di dividere un'unità concreta in parti uguali. Questa è un'idea piuttosto intuitiva e facilmente modellizzabile nel contesto di vita quotidiana. I bambini, infatti, hanno presente che cosa significhi prendere metà mela o ripartire un certo numero di caramelle fra tre amici. Normalmente, gli insegnanti considerano come unità modelli continui (pizza, torta, cioccolata, ecc.) o discreti (quantità di biglie, di caramelle, ecc.) di cui si chiede la distribuzione ad amici o persone in parti uguali. Così, $\frac{3}{4}$ rappresenta l'operazione di dividere una torta (una pizza, una quantità di caramelle, ecc.) in quattro parti uguali, prendendone poi tre. La ricerca ha chiaramente mostrato come questo modello possa rappresentare un potenziale ostacolo didattico per la costruzione del significato di frazione: che cosa significa, allora, $\frac{5}{4}$?

Per rappresentare la frazione $\frac{5}{4}$ con il modello della torta, è necessario infatti considerare due torte, ciascuna delle quali verrà divisa in quattro parti eguali prendendone poi 5. Cosa rispondere però agli alunni che «vedono» $\frac{5}{8}$ in questa rappresentazione? In altre parole, come e perché considerare solo 4 delle fette che il modello rappresenta?

È facile allora capire come la complessità concettuale e cognitiva relativa all'insegnamento-apprendimento delle frazioni possa sfuggire agli insegnanti. Ci chiediamo perché, dunque, l'insegnamento delle frazioni alla scuola primaria sia così diffusamente connesso a questo approccio.

La ricerca ha messo in evidenza che la scelta degli insegnanti cade su un «oggetto concreto di riferimento» perché rispondente a certe caratteristiche quali essere percepito come familiare, e quindi in certa misura rassicurante e motivante, ed essere chiaramente unitario e, quindi, non aver bisogno di ulteriori spiegazioni o definizioni (Fandiño Pinilla, 2007). La torta (o la pizza), da distribuire in parti uguali a due o tre bambini, risponde appunto a queste caratteristiche.

Negli ultimi trent'anni i ricercatori in didattica della matematica hanno identificato numerosi fattori di complessità nella costruzione del significato di frazione. In particolare, sono stati individuati alcuni ostacoli che sembrano derivare sia dalla natura stessa del concetto di frazione sia, come accennato, dall'approccio didattico solitamente adottato (Behr et al., 1993; Lamon, 1999).

Questi fattori di complessità sembrano giocare il ruolo di ostacoli al progresso stesso dei bambini proprio nel dominio della matematica (Behr et al.,

DdA – Difficoltà di Apprendimento e Didattica Inclusiva
Edizioni Centro Studi Erickson (TN) – ISSN 2283-3188
Vol. 3, n. 4, aprile 2016
(pp. 449-467)

1993). Anche per questo, appare davvero essenziale studiare un approccio efficace alla costruzione del significato di frazione.

Come accennato sopra, la natura del concetto di frazione è molto complessa e deriva dai diversi significati ai quali è associata (Brousseau, Brousseau e Warfield, 2004; Kieren, 1995; Lamon, 2001; Charalambous e Pitta-Pantazi, 2005).

Già Kieren, nel 1976, indica come il concetto di frazione sia, di fatto, definito da diversi significati e afferma che la comprensione di tale concetto dipende dalla comprensione di ciascuno di essi così come dalla loro connessione. Nel paragrafo seguente illustreremo i principali significati di frazione che la ricerca ha identificato.

Significati legati al concetto di frazione

Kieren (1980; 1988; 1992) ha individuato i seguenti significati di frazione:

- *parte/tutto:* legato alla partizione. Ad esempio, partizione della torta (unità continua) o della manciata di caramelle (unità discreta) in parti uguali;
- *rapporto:* ad esempio, una parte di acqua e 4 di succo di arancia significa un rapporto di 1 a 4 oppure 1 : 4, per un totale di 5 parti. Ci si riferisce anche a cose in «proporzione» come, ad esempio, lunghezza e larghezza di una stanza;
- *operatore:* ad esempio, i $\frac{3}{4}$ di una popolazione composta da 120 persone;
- *quoziente:* dove il numeratore della frazione indica una quantità che deve essere divisa per il numero indicato al denominatore. È una divisione espressa ma non eseguita. In altre parole, la frazione $\frac{a}{b}$ può essere interpretata come $a : b$. Questo significato coinvolge la partizione, ad esempio se consideriamo 3 barrette di cioccolato da dividere in 4 persone (3 diviso 4), ciascuna persona riceverà $\frac{3}{4}$ del cioccolato;
- *misura:* considerando u come unità di misura, la frazione $\frac{3}{4}$ si esprime come $\frac{3}{4}\,u$ = 3 volte $\frac{1}{4}\,u \rightarrow 3 \times \frac{1}{4}\,u$.

L'insegnamento-apprendimento dei diversi significati di frazione spesso porta a misconcezioni e deve affrontare ostacoli di diversa natura. Nel paragrafo successivo illustreremo quelli che ci sembrano i più significativi.

Difficoltà, ostacoli e misconcezioni nell'insegnamento-apprendimento delle frazioni

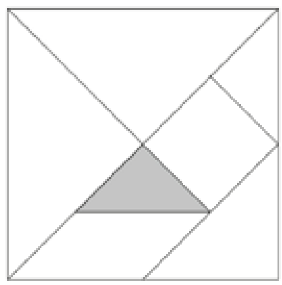
L'elevata percentuale di alunni e studenti che incontrano difficoltà nell'affrontare le frazioni è documentata dai risultati delle prove nazionali INVALSI. Ad esempio, nel considerare una frazione come parte di un tutto — che, come già accennato, costituisce l'approccio didattico privilegiato alle frazioni —, il quesito D25 delle prove INVALSI per la terza classe della scuola secondaria di primo grado (a.s. 2012-13) evidenzia come solo il 42% degli alunni scelga la risposta corretta (D), scomponendo la figura in parti equivalenti ed esprimendo la parte individuata come rapporto (figura 1). In questa domanda, ben il 54,6% sceglie una risposta errata.

Ancora, nell'affrontare l'ordinamento di unità frazionarie, nelle prove dell'anno scolastico 2013-2014, il quesito D19 mostra come il 59,5% degli alunni della quinta classe della scuola primaria fornisca risposte errate a riguardo (figura 2).

Questa difficoltà sembra persistere anche nella scuola secondaria di primo grado. Ad esempio, nell'ordinare frazioni dove sono fatti variare il numeratore e il denominatore di un'unità, riscontriamo che più del 60% dei ragazzi risponde correttamente nel caso di variazione del numeratore, mentre quasi il 70% risponde in maniera errata quando la variazione è sul denominatore (D26, figura 3).

Ciò sembra dipendere dal fatto che, come vedremo più in dettaglio in seguito, frazioni aventi

D25. **In figura è rappresentato il gioco del Tangram con i pezzi che lo compongono.**



A quale frazione dell'area del Tangram corrisponde il pezzo colorato in grigio?

A. ☐ Un settimo

B. ☐ Un ottavo

C. ☐ Un quindicesimo

D. ☐ Un sedicesimo

Fig. 1 Quesito D25 delle prove INVALSI (3ª classe, scuola secondaria di 1° grado, a.s. 2012-13).

lo stesso denominatore possono essere ordinate applicando le regole di ordinamento dei numeri naturali, mentre ciò non è più valido per quelle il cui denominatore non è uguale.

Ancora, il completamento all'unità costituisce una difficoltà per il 48,3% degli alunni della quinta classe della scuola primaria (D11, prove dell'anno 2011/2012) e ben il 10,8% di essi non è in grado di fornire una risposta (figura 4).

Così pure per il 70,9% dei ragazzi della prima classe della scuola secondaria di primo grado è difficile definire una frazione che sia maggiore dell'unità di misura (D17) e ben il 10,1% di loro non è in grado di fornire una risposta (figura 5).

L'equivalenza tra frazioni, poi, è una difficoltà che persiste per il 53,9% dei ragazzi della terza secondaria di primo grado (quesito D4b, figura 6). Nel quesito in oggetto, infatti, si richiede di rendere equivalenti due frazioni che rappresentano delle probabilità.

A partire da questi risultati, quindi, è possibile identificare alcune difficoltà legate all'apprendimento del significato delle frazioni. Fra queste:

– difficoltà nel gestire il significato di «uguale»;
– difficoltà nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata;
– difficoltà a gestire frazioni equivalenti;
– difficoltà a ordinare frazioni su una retta anche senza passare ai numeri decimali;
– difficoltà a gestire le operazioni tra frazioni.

Analizziamo alcune di queste difficoltà più in dettaglio, scegliendo quelle che maggiormente compaiono nella scuola primaria.

La parola «uguale», usata nell'approccio al significato di $\frac{\text{parte}}{\text{tutto}}$ per dividere torte o, più in generale, figure regolari come la superficie di un rettangolo, spesso è interpretata dagli insegnanti con il significato di «congruente» (Campolucci et al., 2006): dividere in parti uguali una torta o la superficie di un rettangolo viene così interpretato erroneamente come trovare parti della torta o del

D19. **Saverio, Giorgio e Marco ricevono dai nonni la stessa somma di denaro. Dopo una settimana a Saverio è rimasto $\frac{1}{4}$ dei soldi ricevuti, a Marco $\frac{1}{3}$, a Giorgio la metà.**

Chi dei tre ha speso di più in quella settimana?

Risposta: ....

Fig. 2 Quesito D19 delle prove INVALSI (5ª classe, scuola primaria, a.s. 2013-14).

D26. Considera la frazione $\frac{400}{500}$.
Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

		V	F
a.	Aggiungo 1 al numeratore: $\frac{401}{500}$ è maggiore di $\frac{400}{500}$	☐	☐
b.	Aggiungo 1 al denominatore: $\frac{400}{501}$ è minore di $\frac{400}{500}$	☐	☐
c.	Aggiungo 1 sia al numeratore sia al denominatore: $\frac{401}{501}$ è equivalente a $\frac{400}{500}$	☐	☐
d.	Sottraggo 1 sia al numeratore sia al denominatore: $\frac{399}{499}$ è equivalente a $\frac{400}{500}$	☐	☐

Fig. 3 Quesito D26 delle prove INVALSI (3ª classe, scuola secondaria di 1° grado, a.s. 2013-14).

rettangolo che siano congruenti (si veda, a questo proposito, il risultato del quesito D25 evidenziato nella figura 1). Questa misconcezione è legata soprattutto all'uso del termine «uguale» nel linguaggio comune e non permette di identificare parti equiestese come unità frazionarie equivalenti (ad esempio, nella figura 7, la parte ombreggiata del primo rettangolo o le parti componenti il secondo rettangolo come $\frac{1}{4}$).

Inoltre, negli esempi proposti solitamente a scuola, si presenta una figura-unità e se ne cerca una frazione. Difficilmente si creano situazioni inverse che, invece, costituiscono parte essenziale per l'apprendimento delle frazioni. Di qui, la difficoltà degli alunni nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata. A titolo esemplificativo, citiamo nuovamente le prove INVALSI dell'anno 2011-12 (quesito D11, figura 4).

È stato già osservato in precedenza che il significato di frazione come $\frac{\text{parte}}{\text{tutto}}$ è molto utile per introdurre l'idea di frazione. La costruzione di questa conoscenza, però, funziona spesso da ostacolo (ostacolo didattico, perché deriva dalle scelte didattiche operate dall'insegnante) per l'apprendimento successivo, quello cioè che dà senso alla scrittura $\frac{5}{4}$. A questo scopo, dunque, è parso essenziale presentare i diversi significati di frazione (si veda il paragrafo precedente).

Dal punto di vista dell'apprendimento della matematica, le frazioni costituiscono un salto importante nel dominio dell'aritmetica perché rappresentano il primo approccio all'idea di estensione dell'insieme dei numeri naturali. In questo senso, le frazioni hanno bisogno di assumere una posizione sulla linea dei numeri (Bobis, Mulligan e Lowrie, 2013; Bartolini Bussi, Baccaglini-Frank e Ramploud, 2014). Accade spesso, però, che le frazioni non siano esplicitamente identificate come numeri razionali. Per questo, raramente l'approccio didattico si occupa di collocarle sulla retta se non dopo averle trasformate in numeri decimali. Ciò porta a difficoltà relative, ad esempio, all'ordinamento di frazioni e unità frazionarie.

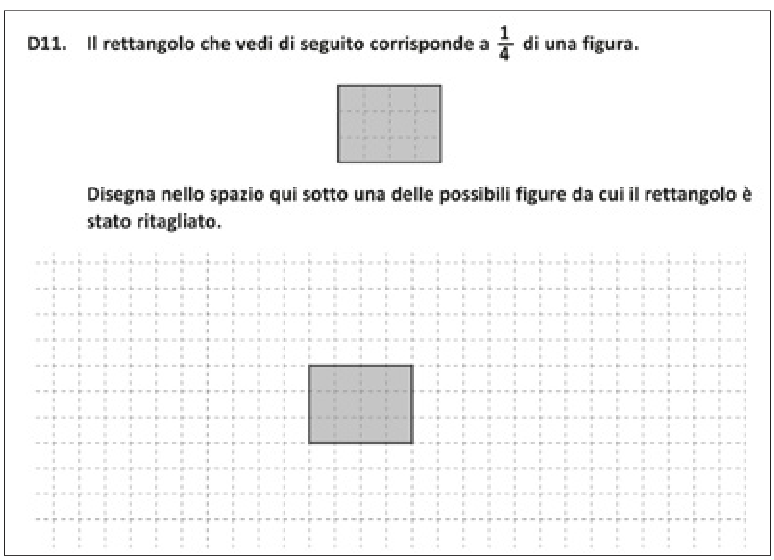
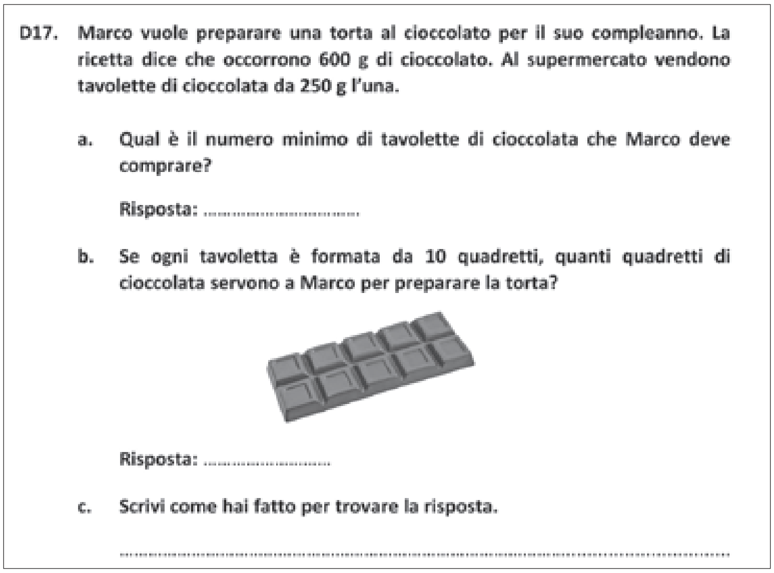


Fig. 4 Quesito D11 delle prove INVALSI (5ª classe, scuola primaria, a.s. 2011-12).



D17. **Marco vuole preparare una torta al cioccolato per il suo compleanno. La ricetta dice che occorrono 600 g di cioccolato. Al supermercato vendono tavolette di cioccolata da 250 g l'una.**

a. **Qual è il numero minimo di tavolette di cioccolata che Marco deve comprare?**

Risposta: ……………………………

b. **Se ogni tavoletta è formata da 10 quadretti, quanti quadretti di cioccolata servono a Marco per preparare la torta?**

Risposta: ………………………

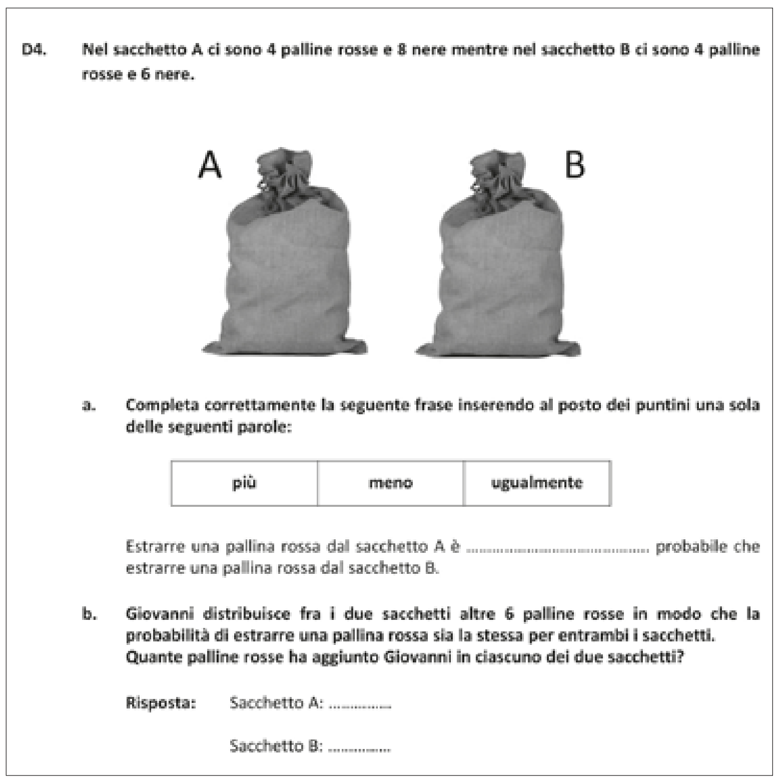
c. **Scrivi come hai fatto per trovare la risposta.**

……………………………………………………………………………………………

Fig. 5 Quesito D17 delle prove INVALSI (1ª classe, scuola secondaria di 1° grado, a.s. 2011-2012).

Oltre alle difficoltà connesse al sistema semantico legato alla frazione, segnaliamo anche alcune difficoltà relative al sistema sintattico. Infatti, quando i bambini incontrano per la prima volta le frazioni, di solito nella terza classe della scuola primaria, viene chiesto loro di trattare serie di cifre in modo diverso da ciò che hanno fatto fino ad allora con la notazione posizionale decimale dei numeri interi. Il numeratore e il denominatore di una frazione sono due numeri, ognuno dei quali è vincolato dalle regole che si applicano a interi positivi, ma che, insieme, rappresentano un nuovo, singolo, numero. Imparare a vedere il numeratore e il denominatore di una frazione insieme, come un singolo numero (Ni e Zhou, 2005), è uno dei più difficili — se non il più difficile — aspetto cognitivo legato alla sintassi delle frazioni (Bobis, Mulligan e Lowrie, 2013). Esso richiede, infatti, risorse relative alla memoria di lavoro maggiori di quelle necessarie per la gestione dei numeri interi (Halford, Nelson e Andrews, 2007).

Sempre legata alla difficoltà di trattare la frazione come un numero, e non come due numeri separati, è la gestione delle operazioni con le frazioni. La letteratura internazionale ha messo in evidenza le difficoltà degli alunni, anche di studenti di scuola secondaria di secondo grado, a operare con le frazioni. Capita infatti che regole



D4. **Nel sacchetto A ci sono 4 palline rosse e 8 nere mentre nel sacchetto B ci sono 4 palline rosse e 6 nere.**

A B

a. **Completa correttamente la seguente frase inserendo al posto dei puntini una sola delle seguenti parole:**

più	meno	ugualmente

Estrarre una pallina rossa dal sacchetto A è ……………………………………… probabile che estrarre una pallina rossa dal sacchetto B.

b. **Giovanni distribuisce fra i due sacchetti altre 6 palline rosse in modo che la probabilità di estrarre una pallina rossa sia la stessa per entrambi i sacchetti. Quante palline rosse ha aggiunto Giovanni in ciascuno dei due sacchetti?**

Risposta: Sacchetto A: ……………

Sacchetto B: ……………

Fig. 6 Quesito D4b delle prove INVALSI (3ª classe, scuola secondaria di 1° grado, a.s. 2012-13).

valide per la moltiplicazione vengano estese anche all'addizione. Per cui, la regola

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

che esprime un'uguaglianza vera per la moltiplicazione tra frazioni non è altrettanto valida per la somma di frazioni:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a + c}{b + d}$$

La regola per la moltiplicazione di frazioni diventa così un ostacolo per l'apprendimento della regola che definisce la somma di frazioni.

Connessa alla questione sintattica è anche la modalità di scrittura e lettura delle frazioni. Ci riferiamo, ad esempio, alla lettura e scrittura di frazioni «alla cinese» descritta da Bartolini Bussi, Baccaglini-Frank e Ramploud nel loro articolo *Intercultural dialogue and the geography and history of thought* (2014). In esso, infatti, si mette in evidenza come la lettura e scrittura delle frazioni nei Paesi orientali avvenga dal basso verso l'alto, cioè nell'ordine contrario rispetto a quello usato in Occidente, ovvero dall'alto verso il basso. Ciò condiziona, ovviamente, anche la lettura della frazione: la frazione $\frac{3}{4}$ è letta dai bambini orientali come «di quattro, tre» ed è scritto prima il denominatore, poi la linea di frazione e in ultimo il numeratore. I tre autori, oltre a formulare ipotesi storiche circa la differenza nella lettura e nella scrittura delle frazioni fra Oriente e Occidente, mostrano come l'adozione della lettura «alla cinese» possa avere alcune utili implicazioni per la didattica delle frazioni. In particolare, lavorando con soggetti con difficoltà o con disturbi specifici di apprendimento che presentano grande difficoltà a posizionare, in modo approssimativo, una frazione fra zero e uno, hanno mostrato come la lettura «alla cinese» aiuti a ridurre lo stato di ansia rispetto al compito e migliori i risultati della performance perché è aderente alla procedura di costruzione della frazione come parte di un tutto. La lettura dall'alto verso il basso, al contrario, che si usa normalmente in Occidente e risulta corrispondente a «due terzi», cioè «due diviso tre», media, di fatto, il significato di quoziente, che è completamente diverso dal significato di $\frac{\text{parte}}{\text{tutto}}$ con il quale la frazione viene introdotta nella scuola primaria. Ciò è fonte inevitabile di misconcezioni e ostacoli.

Imparare a conoscere gli aspetti lessicali e sintattici legati alle frazioni può favorire il superamento di diversi ostacoli epistemologici e cognitivi (Bartolini Bussi, Baccaglini-Frank e Ramploud, 2014), fra i quali possiamo citare:

- il prodotto/quoziente di due frazioni produce una frazione maggiore/minore delle precedenti;
- le proprietà di ordinamento dei numeri naturali possono essere estese anche alle frazioni considerando il solo numeratore (Iuculano e Butterworth, 2011). Questa proprietà funziona solo quando le frazioni hanno lo stesso denominatore, ad esempio $\frac{2}{9}$ e $\frac{4}{9}$, essendo $2 < 4$. Quando però le frazioni hanno denominatori diversi, ad esempio $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{7}$, questa proprietà non è più vera (riducendo le frazioni allo stesso denominatore, si otterrebbe $\frac{14}{21} < \frac{12}{21}$, che è falso);
- così come i numeri naturali, ogni frazione possiede una successiva.

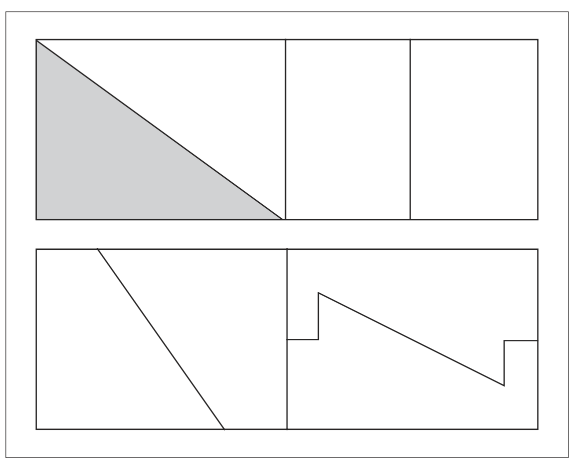


Fig. 7 Parti di un rettangolo che identificano $\frac{1}{4}$ (il secondo rettangolo è tratto da Fandiño Pinilla, 2005).

Quest'ultimo costituisce uno degli ostacoli cognitivi di maggior rilievo che gli alunni devono superare nell'approccio alle frazioni: l'idea di densità di Q, cioè l'esistenza, tra due frazioni, di infinite altre frazioni. Ciò giustifica la non esistenza di una frazione successiva a una data.

Dunque, le conoscenze acquisite in un insieme numerico (in N, numeri naturali), che si tenta di estendere in un suo ampliamento (Q), provocano, solitamente, il nascere di un ostacolo, nel senso indicato da Brousseau (1983).

Un'altra difficoltà legata ancora al sistema di rappresentazioni semiotiche del concetto di frazione è proprio la numerosità delle rappresentazioni: aprendo i libri di testo, si nota immediatamente la grande quantità di rappresentazioni semiotiche usate per esprimere le frazioni. Manipolare queste rappresentazioni, scegliendo le caratteristiche del concetto di frazione che intendiamo trattare, non è un processo che si impara automaticamente. Questo apprendimento è il risultato di un insegnamento esplicito e specifico in cui l'insegnante deve rendere lo studente direttamente responsabile del suo apprendimento. Duval (1995) mette in guardia dagli impliciti legati all'uso delle rappresentazioni e sottolinea come il passaggio da una rappresentazione a un'altra sia essenziale ai fini dell'apprendimento: l'insegnante può eseguire facilmente questo passaggio perché possiede il significato di frazione, ma un alunno, che non ha ancora costruito tale significato, rischia di imparare a usare i diversi sistemi di rappresentazione e, non per questo, di interiorizzare il significato di frazione. È ciò che Duval definisce «paradosso dell'insegnamento»: l'insegnante, che conosce il significato di frazione, propone alcune delle sue rappresentazioni semiotiche allo studente, che invece non conosce ancora il significato di frazione, sperando che, proprio attraverso queste rappresentazioni, lo studente possa costruire il significato di frazione. Di fatto, però, lo studente gestisce solo rappresentazioni semiotiche (ad esempio, formule, grafici, parole) ma non il significato in sé. Se lo studente conoscesse già il significato (come l'insegnante), potrebbe riconoscerlo nelle sue rappresentazioni semiotiche, ma poiché egli ancora non lo conosce, vede solo rappresentazioni semiotiche. Così, il significato di frazione può essere visualizzato o rappresentato attraverso diverse rappresentazioni semiotiche — la torta, la superficie piana regolare, ecc. — e possiamo anche usare le parole per descrivere come operiamo sulla torta o per etichettare il risultato ottenuto, ma ciò che stiamo manipolando sono rappresentazioni semiotiche del significato (più o meno astratte), non il significato di frazione in sé.

■ *Un'altra difficoltà legata al sistema di rappresentazioni semiotiche del concetto di frazione è proprio la numerosità delle rappresentazioni: aprendo i libri di testo, si nota immediatamente la grande quantità di rappresentazioni semiotiche usate per esprimere le frazioni.*

Quindi, appare essenziale, come insegnanti, trovare la consapevolezza e il tempo per lavorare sulle diverse rappresentazioni semiotiche e, soprattutto, per trovare i legami tra di esse.

Il percorso «Frazioni sul filo»

Abbiamo visto come il concetto di frazione rispecchi diversi significati e come essi siano mediati da diverse rappresentazioni che, spesso, la didattica non mette in connessione fra loro. Ciò provoca ostacoli e misconcezioni che portano gli alunni della scuola primaria e gli studenti della scuola secondaria di 1° grado a incontrare difficoltà anche nella gestione sintattica delle frazioni.

Così, un gruppo di ricerca-azione valdostano, coordinato da una ricercatrice dell'Università della Valle d'Aosta e composto da una trentina di

■ *Un gruppo di ricerca-azione valdostano ha deciso di accettare la sfida di pensare a un percorso didattico efficace per l'insegnamento-apprendimento delle frazioni.*

insegnanti della regione,[1] ha deciso di accettare la sfida di pensare a un percorso didattico efficace per l'insegnamento-apprendimento delle frazioni. Il percorso è stato realizzato e descritto nel volume *Frazioni sul filo: strumenti e strategie per la scuola primaria* (Robotti, Censi, Peraillon e Segor, 2016).

Scopo del volume è mostrare come diversi significati di frazione possano essere messi in relazione trovando connessioni fra le rispettive rappresentazioni. Per questo, illustreremo un percorso didattico, rivolto agli alunni dalla terza alla quinta classe della scuola primaria, nel quale mostriamo come i diversi significati di frazione possano essere messi in relazione trovando connessioni fra le rispettive rappresentazioni. Il concetto di frazione viene infatti affrontato dapprima mediando il significato di $\frac{\text{parte}}{\text{tutto}}$, poi quello di misura, connesso al significato di operatore, per arrivare infine a posizionare le frazioni sulla linea dei numeri.

Come vedremo, un ruolo privilegiato nel percorso didattico proposto è assunto dalle unità frazionarie (o frazioni unitarie). Esse saranno identificate inizialmente come parti di un foglio A4, che rappresenta l'unità di misura scelta, poi su una striscia di carta quadrettata, sulla retta dei numeri e infine sul «filo delle frazioni». A partire dalle unità frazionarie, si costruiscono le frazioni maggiori, minori o uguali a 1 o a un suo multiplo.

Il fatto che una frazione possa essere scritta in più modi come somma di unità frazionarie diverse supporta efficacemente la risoluzione di problemi. Ad esempio, volendo dividere 5 pizze fra 8 bambini, un matematico risponderebbe probabilmente proponendo la soluzione $\frac{5}{8}$, che è realizzabile considerando la frazione con significato di divisione: ognuna delle 5 pizze viene divisa in 8 parti uguali, così da distribuire 5 fette a ciascun bambino. Dal punto di vista della rappresentazione matematica, dunque, l'operazione consiste nel sommare $\frac{1}{8}$ a se stesso per 5 volte. Concretamente, però, questa non è certo la soluzione più conveniente perché la suddivisione in 8 fette della pizza porta con sé un margine di errore non irrilevante. Esso può essere controllato dividendo 4 delle 5 pizze in due parti uguali (così da ottenere 8 parti uguali da metà pizza ciascuna) e dividendo l'ultima pizza in 8 parti (così da distribuire una fetta a ciascuno degli 8 bambini). Ciò che esprime quest'ultima soluzione, certamente più efficace dal punto di vista pratico, è la frazione $\frac{5}{8}$ come somma di unità frazionarie: $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

Quadro teorico di riferimento

Per progettare il percorso didattico proposto nel volume, il riferimento usato è il quadro teorico della «mediazione semiotica»,[2] secondo il quale è possibile distinguere due momenti nella pianificazione e realizzazione delle attività didattiche:

1. la progettazione delle attività;
2. il funzionamento delle attività.

Nella progettazione, l'insegnante compie specifiche scelte rispetto agli artefatti (oggetti, testi, software, ecc.) da usare nelle diverse attività, alle consegne da porre, agli oggetti matematici che costituiscono il sapere matematico in gioco. Ciò definisce

[1] Il gruppo di ricerca-azione «Questione di numeri: mediatori e didattica della matematica efficace» è coordinato per la parte scientifica dalla ricercatrice Elisabetta Robotti dell'Università della Valle d'Aosta e, per quella organizzativa, dalla Sovraintendenza agli Studi della Regione Valle d'Aosta.

[2] Per una descrizione dettagliata del quadro teorico della mediazione semiotica si rimanda al volume *Aritmetica in pratica: Strumenti e strategie dalla tradizione cinese per l'inizio della scuola primaria* (Bartolini Bussi, Ramploud e Baccaglini-Frank, 2013), da cui sono tratte le figure 8 e 9.

il potenziale semiotico dell'artefatto scelto e usato dall'insegnante, che media il sapere matematico e lo rende accessibile ai bambini tramite le consegne. La fase di progettazione è esemplificata nella parte a sinistra dello schema presente in figura 8.

Nella fase di funzionamento, l'insegnante deve gestire le attività in classe per orientarle verso la costruzione del sapere matematico oggetto di apprendimento. Deve cioè gestire la trasformazione dei testi (segni verbali, grafici, concreti, ecc.), prodotti dagli alunni tramite l'uso dell'artefatto, in testi matematici che abbiano un diretto riferimento al sapere matematico in gioco. A questo scopo, l'insegnante deve chiedersi come osservare i bambini in classe, come interagire con loro e che cosa fissare nel tempo nella memoria dei bambini e del gruppo.

La parte a destra dello schema presente in figura 8 esemplifica la fase di funzionamento.

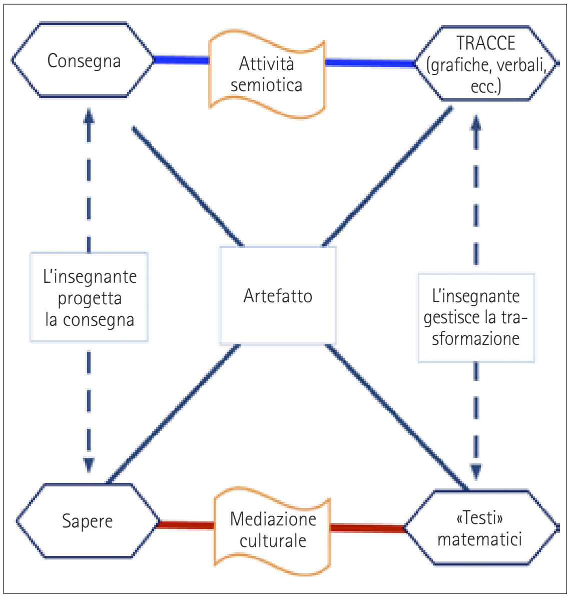


Fig. 8 Fasi della pianificazione e realizzazione delle attività didattiche.

In particolare, le consegne che l'insegnante propone ai bambini attivano un ciclo didattico che alterna attività individuali o di piccolo gruppo — che prevedono l'uso dell'artefatto e, quindi, la produzione di segni in contesto (produzione semiotica di tracce costituite da testi scritti o orali, disegni, oggetti, ecc.) — ad attività collettive nelle quali, attraverso la discussione matematica gestita dall'insegnante, i segni in contesto diventano segni matematici condivisi dalla classe. «La fase successiva è la produzione collettiva di testi, orchestrata dall'insegnante, per giungere a formulazioni condivise, archiviabili nella memoria collettiva e riutilizzabili nel futuro» (Bartolini Bussi, Ramploud e Baccaglini-Frank, 2013).

Nella figura 9 viene esemplificato il ciclo didattico descritto.

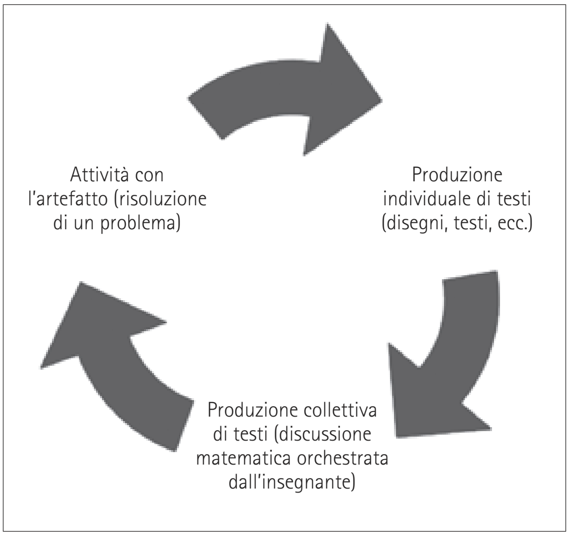


Fig. 9 Ciclo didattico.

La mediazione semiotica e il percorso didattico sulle frazioni

Il percorso *Frazioni sul filo* prevede l'uso di diversi artefatti: la tovaglietta, la striscia di carta quadrettata, la retta dei numeri e il filo. Il potenziale semiotico di questi artefatti consente di mettere in relazione consegne accessibili ai bambini con il sapere accessibile all'insegnante.

Artefatto «tovaglietta»

La *tovaglietta* è un foglio A4 che nelle prime attività sarà rigorosamente di colore bianco e, nelle successive, assumerà colori diversi.

I significati matematici che si vogliono introdurre mediante l'artefatto riguardano:

– *costruzione di unità frazionarie a partire dall'unità di misura data,* realizzabile piegando o ritagliando il foglio A4 in parti uguali;
– *equivalenza tra unità frazionarie,* realizzabile tagliando o piegando unità frazionarie e ricomponendole per mostrare l'equivalenza delle superfici. Ciò consente di superare la misconcezione che «unità frazionarie uguali» significhi «unità frazionarie congruenti»;
– *somma di unità frazionarie per ottenere l'unità di misura,* realizzabile ricoprendo un foglio A4 con unità frazionarie diverse ottenute ritagliando un altro foglio A4. Ciò consente di ritornare all'unità di misura a partire dalle unità frazionarie.

Le consegne assegnate ai bambini sono state elaborate considerando:

– un momento di avvio, che è costituito dal primo problema posto: la lettera del pizzaiolo che motiva la scelta dell'artefatto agli occhi dei bambini, la necessità di ripartire la tovaglietta in parti uguali, ecc.;
– momenti di rilancio utilizzabili nel corso dell'attività: ad esempio, comporre diverse tovagliette ricoprendo un foglio A4 con differenti unità frazionarie;
– momenti di riflessione utilizzabili dopo l'attività, ad esempio costruire le scatole delle unità frazionarie dove trovare la stessa unità frazionaria rappresentata da figure diverse, figure cioè non congruenti ma equivalenti.

Osserviamo come il colore, con cui le unità frazionarie vengono realizzate in un secondo tempo,

■ *Il colore, con cui le unità frazionarie vengono realizzate in un secondo tempo, assume qui il ruolo di supporto alla memoria a breve e a lungo termine che risulta efficace soprattutto per i bambini in difficoltà e per quelli che meglio riescono a imparare facendo ricorso al canale visivo non verbale.*

assume qui il ruolo di supporto alla memoria a breve e a lungo termine che risulta efficace soprattutto per i bambini in difficoltà e per quelli che meglio riescono a imparare facendo ricorso al canale visivo non verbale. Il colore in questa attività non è funzionale alla costruzione dei significati, perché esso identifica l'unità frazionaria dopo che se ne è costruito il significato come parte di un tutto, facendo ricorso all'equivalenza di superfici.

Queste fasi sono svolte individualmente o in piccolo gruppo ed è sempre richiesta la produzione verbale o grafica. Solo in seguito le attività sono svolte nell'ambito del gruppo classe per arrivare alla condivisione dei significati. È facile identificare qui il ciclo didattico che costituirà lo stile di lavoro della classe e ciò che i bambini si aspettano come modalità di presentazione dei diversi argomenti. Le diverse fasi illustrano il potenziale semiotico dell'artefatto tovaglietta e indicano già alcune piste di lavoro.

Nella fase di funzionamento, l'insegnante raccoglie i segni prodotti dai bambini durante l'attività e le tracce dei processi messi da loro in atto per lo svolgimento dell'attività stessa. Lo scopo è isolare gli aspetti matematici fondanti l'attività e renderli accessibili ai bambini attraverso una nuova rappresentazione che consenta loro di riutilizzarli in situazioni future. Le tracce sono di diversa natura, lessicali (ad esempio, «un mezzo»), sintattiche ($\frac{1}{2}$), figurali (il disegno, sul quaderno, della metà di un rettangolo che costituisce il modello del foglio A4) o materiali (metà del foglio A4) e sono sempre collegate alla situazione (per questo sono definite «testi situati»). L'insegnante ha il compito di ricostruire il processo attraverso di esse e di fare in modo che anche l'alunno prenda coscienza del proprio processo. A questo scopo, progetta l'attività didattica in modo che ci sia spazio per la discussione — che consente di mettere in evidenza le tracce che portano a strategie efficaci —, per la costruzione di materiale comune (scatole delle frazioni, tovagliette, ecc.) e per la sintesi del lavoro svolto.

Per fissare a lungo termine nella memoria dei bambini i significati matematici in gioco, che devono quindi essere espliciti in modo da poter essere interiorizzati, l'insegnante chiede di riprodurre sul quaderno il funzionamento degli artefatti, di tenere traccia delle discussioni di classe e di redigere testi individuali o collettivi in cui i processi sviluppati siano esplicitamente collegati al sapere.

Uso dell'artefatto tovaglietta

A ciascun bambino della classe (o piccolo gruppo) sarà chiesto di dividere in parti uguali un foglio A4 bianco (unità di misura), con la modalità che ciascuno ritiene più opportuna. I bambini usano prevalentemente la piegatura del foglio o il righello. Poiché i bambini della classe non divideranno con lo stesso criterio il foglio, si otterranno unità frazionarie con forme diverse. Questo consentirà all'insegnante di affrontare e superare uno dei principali ostacoli didattici che si presentano quando

■ *Per fissare a lungo termine nella memoria dei bambini i significati matematici in gioco, l'insegnante chiede di riprodurre sul quaderno il funzionamento degli artefatti, di tenere traccia delle discussioni di classe e di redigere testi individuali o collettivi in cui i processi sviluppati siano esplicitamente collegati al sapere.*

viene usato il modello fisico del foglio (della torta, della tavoletta di cioccolato, ecc.) come unità di misura: dividere in parti uguali una stessa superficie non significa ottenere parti necessariamente congruenti ma, piuttosto, equivalenti. L'equivalenza tra le unità frazionarie verrà verificata con un approccio cinestetico-tattile facendo usare ai bambini forbici e piegature.

Dopo avere identificato le equivalenze fra le unità frazionarie rappresentate dalle superfici ottenute, si passerà all'etichettamento delle stesse con la notazione simbolica: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ e così via.

In questa fase, la scelta del foglio bianco è molto importante perché i bambini devono focalizzare l'attenzione sull'estensione della superficie e non su altri indicatori quali, ad esempio, il colore.

Solo successivamente si assocerà un colore diverso a ciascuna unità frazionaria (facendo ricorso a fogli A4 colorati). Il colore sarà usato come supporto alla memoria rispetto all'unità frazionaria, sarà mantenuto per l'intero percorso didattico, richiamandolo anche negli strumenti che saranno utilizzati nelle attività didattiche successive, e sarà particolarmente utile per i bambini più in difficoltà. È allora chiaro il motivo per cui inizialmente i bambini vengono fatti lavorare sul foglio bianco: se il colore fosse introdotto da subito, correremmo il rischio che gli alunni identifichino l'unità frazionaria esclusivamente in base al colore e non in base alla procedura di divisione dell'unità di misura e all'equivalenza delle parti ottenute.

Dopo questa prima fase, si può passare ai fogli A4 colorati. Le unità frazionarie ottenute dalle diverse partizioni saranno allora raccolte in scatole: la «scatola dei mezzi», la «scatola dei terzi», la «scatola dei quarti», ecc.

Al contenuto delle scatole si fa ricorso per:

– verificare l'equivalenza tra le unità frazionarie appartenenti alla stessa scatola;
– costruire frazioni: «prendi $\frac{3}{2}$», «prendi $\frac{5}{4}$». I bambini prenderanno allora dalla scatola dei «mezzi» tre unità frazionarie che non saranno necessa-

riamente congruenti ma di cui si è dimostrata l'equivalenza, oppure prenderanno dalla scatola dei «quarti» cinque unità frazionarie. Si può osservare come questa attività consenta di costruire l'idea di frazione come «parte di un tutto» anche quando essa supera l'unità di misura (il «tutto»);
- comporre l'unità di misura sommando diverse unità frazionarie, cioè unità prese da diverse scatole. Ad esempio, prendendo un'unità dalla scatola dei «mezzi», un'unità dalla scatola degli «ottavi», un'unità dalla scatola dei «quarti» e due unità dalla scatola dei «sedicesimi» si può ricomporre una tovaglietta. Ciò equivale alla scrittura sintattica frazionaria: $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{2}{16} = 1$;
- confrontare unità frazionarie: più il denominatore è grande, più l'unità frazionaria è piccola.

Suggeriamo di introdurre l'artefatto tovaglietta nel secondo quadrimestre della classe terza.

Artefatto «striscia di carta quadrettata»

La *striscia di carta quadrettata* è una striscia con quadrettatura da 1 cm, alta circa 10 cm e lunga circa 1 m, che è possibile ottenere ritagliando i fogli dei blocchi di carta da lavagna per conferenze. Sulla striscia saranno considerate di volta in volta diverse unità di misura definite da lunghezze diverse (in quadretti), verranno fissati alcuni numeri interi (0, 1, 2, 3, … quanto la lunghezza della striscia permette, mettendo bene in evidenza che la striscia potrebbe essere lunghissima, potenzialmente infinita) e verranno costruite unità frazionarie e frazioni.

I significati matematici che si vogliono introdurre mediante l'artefatto riguardano:

- *frazione come operatore su una data unità di misura:* fissata una certa unità di misura sulla striscia, si chiede di posizionare una certa unità frazionaria e, successivamente, una certa frazione (uguale o maggiore di 1);
- *confronto fra diverse unità frazionarie:* fissata una certa unità di misura su diverse strisce, si chiede di posizionare, su ognuna di esse, diverse unità frazionarie, confrontandone percettivamente il risultato;
- *dipendenza dell'unità frazionaria dall'unità di misura scelta:* si considerano diverse unità di misura, ciascuna su una diversa striscia, e si chiede di posizionare su ogni striscia la stessa unità frazionaria, ad esempio $\frac{1}{2}$;
- *ordinamento di unità frazionarie:* fissata un'opportuna unità di misura (minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni da rappresentare) su una striscia, si chiede di posizionare su di essa diverse unità frazionarie;
- *equivalenza tra frazioni:* fissata una certa unità di misura sulla striscia, si chiede di posizionare sulla stessa striscia diverse frazioni. Fra esse possono presentarsi anche frazioni equivalenti (ad esempio, $\frac{2}{4}$ equivalente a $\frac{1}{2}$ o $\frac{2}{2}$ equivalente a 1).

Le consegne assegnate ai bambini sono state elaborate considerando un primo momento di avvio che permette loro di familiarizzare con l'artefatto: definire una certa unità di misura sulla base della quale costruire unità frazionarie. L'attività è ripetuta più volte facendo variare le unità di misura e le unità frazionarie da rappresentare sulla striscia, cioè confrontando unità frazionarie diverse su unità di misura uguali o unità frazionarie uguali su unità di misura diverse.

Le unità frazionarie sono colorate con gli stessi colori scelti per le rispettive unità frazionarie costruite nelle attività con l'artefatto tovaglietta. Il colore, dunque, assume qui il ruolo non soltanto di supporto alla memoria ma di vero e proprio artefatto che diventa strumento (nel senso definito dal quadro della mediazione semiotica), perché consente ai bambini di legare il significato di unità frazionaria

■ *Le unità frazionarie sono colorate con gli stessi colori scelti per le rispettive unità frazionarie costruite nelle attività con l'artefatto tovaglietta.*

costruita con la tovaglietta (frazione come parte di un tutto) al significato di unità frazionaria costruito con la striscia (frazione come operatore su un'unità di misura).

Le attività che seguono consentono di effettuare il confronto tra unità frazionarie (fissata una certa unità di misura): le strisce realizzate sono appese alla lavagna, una sotto l'altra, in modo che il lato sinistro corrispondente al punto 0 sia allineato. Il confronto tra unità frazionarie è percettivamente evidente e le successive attività di riflessione collettiva hanno lo scopo di far emergere la relazione fra denominatore e ordinamento delle unità frazionarie.

In seguito, le consegne prevedono la variazione dell'unità di misura (assegnata a ciascun gruppo in cui la classe è divisa) e la rappresentazione di una stessa unità frazionaria. Ancora, le strisce realizzate sono appese alla lavagna, una sotto l'altra, e la diversa estensione dell'unità frazionaria in relazione all'unità di misura assegnata diventa un fatto percettivamente evidente. L'insegnante avvia un'attività di riflessione collettiva che consente di far emergere in modo esplicito e condiviso dalla classe la dipendenza dell'unità frazionaria dall'unità di misura assegnata.

La costruzione di frazioni (minori, uguali o maggiori di 1) è richiesta tramite consegne che assegnano una data unità di misura. L'attività è particolarmente significativa perché l'uso dell'artefatto striscia consente di superare una delle misconcezioni più diffuse (di cui si è fatto cenno in apertura) fra quelle che si presentano nell'approccio alle frazioni con i modelli continui generalmente usati in didattica (torta, tavoletta di cioccolato, ecc.): la necessità di considerare due modelli (ad esempio, due torte) per la rappresentazione di una frazione maggiore dell'intero (ad esempio, $\frac{5}{4}$) rischia di far considerare un numero di parti doppio (8 parti anziché 4, corrispondenti al numero totale delle fette di torta rappresentate dal modello considerato).

L'uso dell'artefatto striscia consente ai bambini di rappresentare frazioni maggiori di 1 considerando l'unità frazionaria n volte, dove n è il numeratore della frazione da rappresentare sulla striscia. Ancora, il confronto e l'ordinamento di frazioni sono me-

■ *L'insegnante avvia un'attività di riflessione collettiva che consente di far emergere in modo esplicito e condiviso dalla classe la dipendenza dell'unità frazionaria dall'unità di misura assegnata.*

diati dal confronto delle loro rappresentazioni sulle strisce. Osserviamo che già con l'artefatto tovaglietta si era superata l'unità di misura (il numero 1) richiedendo di realizzare più tovagliette con la stessa composizione di unità frazionarie. Con la striscia questo passaggio viene rafforzato.

L'attività di ordinamento di frazioni è introdotta chiedendo ai bambini di rappresentare, sulla stessa striscia, diverse frazioni. Ciò richiede di:

1. definire un'opportuna unità di misura che consenta di rappresentare tutte le frazioni sulla stessa striscia;
2. definire una strategia grafica che consenta di rappresentare tutte le frazioni sulla stessa striscia.

Il primo di questi punti richiede ai bambini di definire l'unità di misura. Essi, procedendo per tentativi ed errori, arrivano a definire l'unità di misura come il numero di quadretti corrispondenti al minimo comune multiplo (mcm) fra i denominatori delle frazioni da rappresentare. Com'è facile immaginare, non sempre i bambini scelgono immediatamente il minimo fra i multipli comuni ma accade che, per arrivare a un'economia di sforzi, riescano a identificare il più piccolo multiplo comune. Appare chiaro qui il ruolo giocato dall'insegnante nella definizione della consegna: la scelta opportuna delle frazioni da rappresentare mediante l'artefatto striscia implica l'emergere di segni situati che saranno funzionali a isolare gli aspetti matematici fondanti l'attività e a renderli accessibili ai bambini.

Il secondo di questi punti richiede la definizione di una strategia grafica alternativa a quella adottata in precedenza: la rappresentazione colorata sulla stessa striscia delle parti che definiscono le frazioni da rappresentare comporterebbe la sovrapposizione di colori. La necessità di segnare la sola posizione delle frazioni sulla striscia con una lineetta colorata è qui condivisa dalla classe (figura 10).

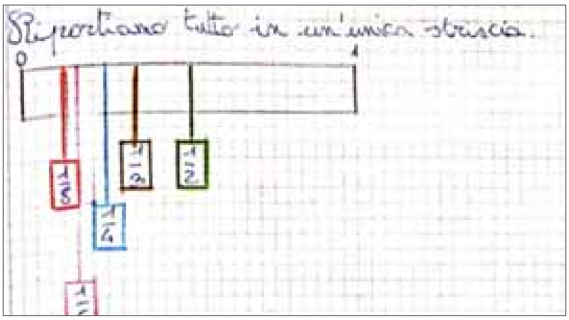


Fig. 10 Posizionamento delle frazioni sulla striscia.

Ancora, il potenziale semiotico dell'artefatto scelto e le consegne definite dall'insegnante giocano un ruolo chiave per arrivare a identificare un sapere matematico nelle tracce (o segni situati) prodotte dai bambini nel contesto dell'attività. Come in precedenza, e come accadrà in tutto il percorso didattico, le fasi sono svolte individualmente o in piccolo gruppo e, come descritto, è sempre richiesta la produzione verbale o grafica. Solo successivamente le attività saranno svolte nel gruppo classe per arrivare alla condivisione dei significati. Il potenziale semiotico dell'artefatto striscia quadrettata risulta quindi evidente.

Inoltre, si è osservato come, già in questa attività, i bambini riconoscano e manifestino attese rispetto al ciclo didattico, cioè allo stile di lavoro adottato dall'insegnante per la classe. È essenziale, quindi, mantenere costanti queste modalità durante tutto il percorso didattico. Ciò significa che anche la ripetitività di alcune consegne e il rispetto dei tempi di tutti i bambini costituiscono parte integrante del ciclo didattico nel quale l'insegnante opera seguendo il modello della mediazione semiotica.

Nella fase di funzionamento, l'insegnante raccoglie i segni prodotti dai bambini durante l'attività e le tracce dei processi messi da loro in atto per lo svolgimento dell'attività stessa. Vengono mantenuti alcuni segni prodotti nelle attività precedenti (scatole delle frazioni), altri vengono introdotti con quest'attività (rappresentazione delle frazioni su strisce quadrettate). Lo scopo è duplice: da un lato isolare gli aspetti matematici fondanti l'attività e renderli accessibili ai bambini attraverso una nuova rappresentazione che consenta loro di riutilizzarli in situazioni future, dall'altro rendere espliciti i legami fra significati diversi di frazione ($\frac{\text{parte}}{\text{tutto}}$ e operatore sull'unità di misura) e le rappresentazioni che li hanno mediati (parti della tovaglietta, sezioni della striscia quadrettata). Si comincia quindi a strutturare un'attività didattica che consente, come auspicato dalla ricerca, di creare un ponte fra i diversi significati di frazione e le diverse rappresentazioni utilizzate allo scopo.

Uso dell'artefatto striscia

Consigliamo di sviluppare le attività con questo artefatto nel primo quadrimestre della classe quarta della scuola primaria, in modo che nel secondo si possano affrontare le frazioni sulla linea dei numeri e, in seguito, sul filo. Queste ultime saranno poi riprese nella classe quinta.

Sulla striscia saranno considerate di volta in volta diverse unità di misura definite da lunghezze diverse (in quadretti), verranno fissati alcuni numeri interi (0, 1, 2, 3, ecc., quanto la lunghezza della striscia permette) e verranno costruite unità frazionarie e frazioni.

Definita un'unità di misura, si chiederà ai bambini di costruire diverse unità frazionarie e, di lì, diverse frazioni. Viceversa, facendo variare l'unità di misura, si mostrerà che la lunghezza di una determinata unità frazionaria dipenderà dall'unità di misura scelta. Come già accennato, lo strumento striscia consente di costruire in modo semplice anche frazioni maggiori di 1, superando l'ostacolo didattico che spesso si ha in presenza di modelli come torte, pizze o tavolette di cioccolato.

Una volta posizionate le unità frazionarie e le frazioni sulla striscia, sarà possibile ordinarle sfruttando aspetti percettivi mediati anche dal colore.

Artefatto «retta»

L'artefatto *retta* è una linea dei numeri rappresentata dai bambini sul quaderno, che comprende i soli numeri positivi a partire dallo 0. L'artefatto retta è, in questo percorso didattico, un naturale «schiacciamento» della striscia. Su di essa è possibile quindi posizionare frazioni senza necessariamente passare alla loro rappresentazione come numeri decimali (figura 11).

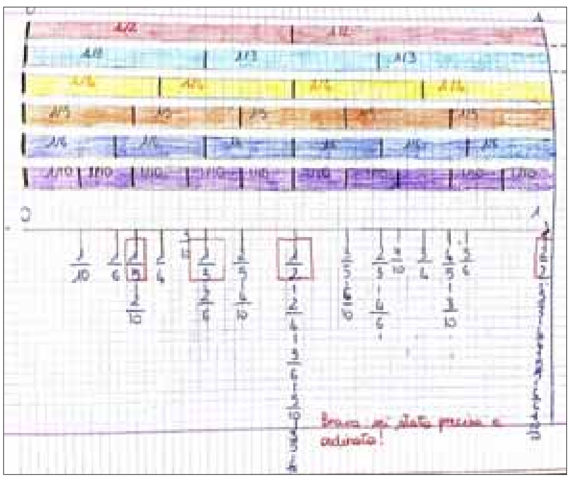


Fig. 11 Naturale «schiacciamento» della striscia nella retta dei numeri.

I significati matematici che si vogliono consolidare mediante l'artefatto riguardano:

- *la successione dei numeri naturali come ripetizione dell'unità di misura;*
- *l'ordinamento di unità frazionarie e frazioni;*
- *l'unità di misura come mcm dei denominatori delle frazioni da posizionare sulla retta;*
- *le frazioni costruite come somma di unità frazionarie.*

■ *Con l'introduzione dell'artefatto* retta *ci si allontana sempre di più dai supporti materiali per agevolare il passaggio all'astrazione dei numeri sulla linea numerica.*

Le consegne sono state progettate per essere affini a quelle proposte con l'artefatto striscia di carta quadrettata. Ciò consente ai bambini di trovare continuità sia fra gli artefatti proposti, sia nella costruzione dei significati matematici in gioco. Così, ai bambini viene chiesto di inserire sulla retta la successione dei numeri naturali come ripetizione dell'unità di misura scelta, di ottenere frazioni come somma di unità frazionarie e di posizionarle sulla retta, di scomporre le frazioni in unità frazionarie. Viene chiesto loro anche di scegliere un'opportuna unità di misura che consenta di rappresentare sulla stessa retta le frazioni richieste (con denominatori diversi). In questa fase, si abbandona il colore relativo alle diverse unità frazionarie per concentrarsi sulla posizione e sulla distanza delle frazioni sulla retta.

Nella fase di funzionamento, i segni prodotti dai bambini durante l'attività (il posizionamento delle frazioni sulla retta) e le tracce dei processi messi da loro in atto per lo svolgimento dell'attività stessa (ad esempio, la strategia scelta per definire l'unità di misura opportuna che consente di rappresentare tutte le frazioni sulla stessa retta) sono raccolti dall'insegnante che gestisce la loro trasformazione in saperi matematici tramite la discussione collettiva.

Uso dell'artefatto «retta»

Con l'introduzione dell'artefatto retta ci si allontana sempre di più dai supporti materiali (tovaglietta e striscia) per agevolare il passaggio all'astrazione dei numeri sulla linea numerica. Naturalmente, i bambini in difficoltà avranno sempre la possibilità di utilizzare il materiale precedentemente costruito.

Le attività sono sempre svolte in gruppo, ma utilizzando lavagna e quaderno. Fra le principali, il

■ *L'artefatto* filo *è costituito da un filo di nylon spesso le cui estremità sono fissate a due pareti contigue dell'aula (come un filo per stendere i panni) e sul quale vengono «appesi» alcuni cartoncini che riportano numeri interi (0, 1, 2, 3, 4, ecc.), unità frazionarie o frazioni.*

posizionamento di frazioni sulla retta dei numeri e, di qui, l'ordinamento di unità frazionarie e frazioni.

Anche in questo passaggio si affrontano contemporaneamente frazioni «proprie», «improprie», «apparenti», cioè frazioni maggiori, minori o uguali all'unità.

Artefatto «filo»

L'artefatto *filo* è costituito da un filo di nylon spesso le cui estremità sono fissate a due pareti contigue dell'aula (come un filo per stendere i panni) e sul quale vengono «appesi» alcuni cartoncini che riportano numeri interi (0, 1, 2, 3, 4, ecc.), unità frazionarie o frazioni. Il filo vuole così simulare la linea dei numeri, a partire dallo zero. I cartoncini delle unità frazionarie dovranno riprendere i colori definiti nelle attività precedenti e saranno predisposti in modo che si possano appendere «a grappolo» affinché i cartoncini di frazioni equivalenti abbiano la stessa posizione sul filo.

I significati matematici che si vogliono introdurre mediante l'artefatto riguardano:

– *ordinamento di unità frazionarie e frazioni:* definita una certa distanza fra 0 e 1 (unità di misura), si procede con l'«appendere» i cartoncini delle frazioni e delle unità frazionarie nella posizione corretta;
– *frazioni equivalenti:* la posizione di alcune frazioni sul filo corrisponde a quella di frazioni già appese sul filo. Il cartoncino corrispondente sarà allora appeso sotto all'altro in modo tale da formare una sorta di «bruco»;
– *numeri razionali come classi di equivalenza:* i «bruchi» ottenuti appendendo uno sotto l'altro i cartoncini delle frazioni equivalenti formano una classe di equivalenza, di cui il primo cartoncino rappresenta la «frazione capoclasse» (frazione ridotta ai minimi termini);
– *densità in Q:* «allargando» l'unità di misura, cioè aumentando la distanza fra i cartoncini corrispondenti a 0 e a 1, è possibile appendere al filo un numero sempre maggiore di unità frazionarie (e di frazioni). Reiterata un numero sufficiente di volte, l'operazione consente di costruire un'immagine mentale associabile all'idea d'infinito. Osserviamo che qui l'unità di misura ha una dimensione non più fissa ma dinamicamente variabile.

Il momento di avvio consente agli alunni di familiarizzare con l'utilizzo dell'artefatto, posizionando innanzitutto i cartellini che rappresentano numeri interi sul filo. L'insegnante appende il cartellino «0».

In seguito, si chiede ai piccoli gruppi, in cui è stata divisa la classe, di appendere al filo unità frazionarie diverse. La validazione delle posizioni scelte sarà mediata dal confronto della stessa situazione già analizzata con la striscia e con la retta. Ancora, quindi, le consegne assegnate ai bambini prevedono che le diverse rappresentazioni delle frazioni siano messe in relazione fra loro.

Osserviamo che, essendo i cartoncini dei numeri naturali adiacenti sul filo, i bambini dovranno forzatamente «allargare» lo spazio presente fra di essi per creare il posto necessario al posizionamento delle unità frazionarie. L'azione sul filo avvia un'attività di riflessione ed è un segno situato che l'insegnante usa per introdurre e sviluppare l'idea di densità dei numeri Q.

Il posizionamento di frazioni (anche maggiori di 1 o equivalenti a numeri interi) permette di introdurre le frazioni equivalenti. I segni previsti dall'insegnante costituiscono la costruzione di «bruchi» di cartoncini associati a frazioni equivalenti. I «bruchi» sono interpretati come classi di equivalenza e la «capoclasse» del gruppo costituisce la frazione generatrice della classe.

Nella fase di funzionamento, l'insegnante raccoglie i segni prodotti dai bambini durante l'attività (in questo caso, il bruco delle frazioni) e le tracce dei processi messi da loro in atto per lo svolgimento dell'attività stessa (ad esempio, «allargare» la distanza fra 0 e 1 sul filo oppure appendere frazioni equivalenti una sotto l'altra) e ne gestisce la trasformazione in saperi matematici. A questo scopo, l'insegnante avvia una discussione di classe che consente sia di consolidare l'idea di dipendenza delle unità frazionarie e delle frazioni dall'unità di misura scelta, sia di introdurre i concetti di frazioni equivalenti, di classe di equivalenza e, quindi, di numero razionale come classe di equivalenza.

Le frazioni «capoclasse» diventano quindi rappresentanti della classe consentendo di attribuire un significato al numero razionale che non coinvolge direttamente il numero decimale (come solitamente accade nella pratica didattica).

Il ciclo didattico è messo in moto con consegne che prevedono l'uso dell'artefatto, alternando attività individuali o di piccolo gruppo, e che si accompagnano alla produzione semiotica di tracce (collocare sul filo frazioni e unità frazionarie, «allargare» l'unità di misura, ecc.), e con la produzione collettiva di testi, che si attua attraverso la discussione orchestrata dall'insegnante e che consente di formulare saperi condivisi (frazioni equivalenti, classi di equivalenza, numeri razionali, ecc.) archiviabili nella memoria collettiva e riutilizzabili in situazioni future.

Uso dell'artefatto «filo»

Se fino a questo momento le frazioni erano collocate su una retta dove la loro posizione era fissa, dipendente da una determinata unità di misura e rappresentata da segmenti, con l'introduzione dell'artefatto filo si affronta il mondo dei numeri razionali, intesi come classi di equivalenza, collocati su una retta dove l'unità di misura varia, diventando, per così dire, «elastica». Qui emergerà la densità dell'insieme dei numeri Q+, considerando anche le frazioni come quoziente e i numeri decimali.

Il filo vuole simulare la linea dei numeri, a partire dallo zero. I cartoncini dei numeri interi sono bianchi, mentre quelli delle unità frazionarie dovranno riprendere i colori definiti nelle attività precedenti. I cartoncini delle unità frazionarie e delle frazioni saranno bucati in alto e in basso, in modo da poter appendere «a grappolo» i cartoncini di frazioni equivalenti. I cartoncini possono essere appesi al filo con delle graffette (quelle per le mantovane sono particolarmente adatti perché scorrono agevolmente lungo il filo).

Così come sulla retta, anche sul filo saranno considerate diverse unità di misura (facendo scorrere il cartellino corrispondente a 1) e ricollocati conseguentemente gli altri numeri interi, le unità frazionarie e le frazioni. La peculiarità del filo, rispetto alla linea dei numeri, è simulare una certa dinamicità: facendo scorrere i cartellini con i numeri si può far variare l'unità di misura, riposizionare frazioni e unità frazionarie presenti sul filo e aumentare così il numero di frazioni appese. Ciò media, con un approccio percettivo e dinamico, la densità di Q.

Le attività con il filo si propongono per la classe quinta della primaria.

Con l'approccio didattico proposto, attraverso cioè la striscia che poi diventa retta e quindi filo, si rinforza l'idea della frazione come numero da collocare sulla linea dei numeri. Questo approccio è vantaggioso, come mostrano anche gli studi di Catherine Lewis, condotti nell'ambito della sperimentazione di un progetto giapponese negli Stati Uniti, nel quale si adotta in modo sistematico l'approccio alle frazioni attraverso la misura lineare (Lewis e Perry, 2015).

Conclusioni

Il percorso didattico proposto nel volume *Frazioni sul filo* è significativo da diversi punti di vista: affronta un tema delicato, quello delle frazioni, ritenuto difficile dagli insegnanti e dai ricercatori di diversi Paesi; è scritto da un gruppo misto Università-Scuola, nel quale un ricercatore universitario ha collaborato con insegnanti della scuola primaria; mette in campo artefatti molto «poveri», che i primi sperimentatori dell'itinerario didattico hanno costruito in casa con le loro mani.

Le difficoltà incontrate dagli insegnanti e dai ricercatori sul tema dell'insegnamento-apprendimento delle frazioni emergono dalla rassegna presentata nella parte iniziale di questo articolo. In particolare, le difficoltà nel costruire il significato di frazione e nell'operare con le frazioni sono «universalmente» condivise, almeno in tutto il mondo occidentale, mentre sembrano minori in alcune lingue e culture (ad esempio quella cinese), in cui l'espressione linguistica è più vicina alla genesi antica della frazione come parte. Questa osservazione ha aperto spazi interessanti per un'ulteriore discussione sull'insegnamento di frazioni e sull'opportunità di introdurre, almeno temporaneamente, un'etichetta verbale alla frazione diversa da quella consueta, che sembra rendere la via più facile.

La collaborazione paritetica Università-Scuola, che si è concretizzata con il lavoro di un gruppo di ricerca-azione, ha reso il percorso didattico efficace e coerente con il quadro teorico di riferimento. Infatti, la sinergia fra scuola e ricerca ha messo a disposizione competenze diverse e complementari che hanno reso il percorso didattico efficace ai fini dell'insegnamento-apprendimento delle frazioni.

Gli artefatti oggetto del percorso — la tovaglietta, la striscia, la retta, il filo — sono artefatti con diversa materialità, ma tutti «intelligenti» nel senso che la loro introduzione, da un lato, risponde a esigenze epistemologiche e cognitive e, dall'altro, crea una continuità ideale tra essi (la tovaglietta considerata in sequenze dà origine alla striscia che si schiaccia e diventa una retta, la quale si materializza di nuovo in un filo, un filo da bucato su cui «stendere» le frazioni). Ci sono, a spirale, andate e ritorni, in cui, ad esempio, l'equivalenza di frazioni torna a più riprese su artefatti e con immagini diverse, anche se collegate. L'impressione è che il ritorno sul materiale concreto apra la possibilità di recuperare gli allievi più in difficoltà.

Bibliografia

Bartolini Bussi M.G., Baccaglini-Frank A. e Ramploud A. (2013), *Aritmetica in pratica. Strumenti e strategie dalla tradizione cinese per l'inizio della scuola primaria,* Trento, Erickson.

Bartolini Bussi M.G., Baccaglini-Frank A. e Ramploud A. (2014), *Intercultural dialogue and the geography and history of thought,* «For the Learning of Mathematics», vol. 34, n. 1, pp. 31-33.

Barton B. (2009), *The language of mathematics. Telling mathematical tales,* New York, Springer.

Behr M.J., Harel G., Post T. e Lesh R. (1993), *Rational numbers. Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct.* In T.P. Carpenter, E. Fennema e T.A. Romberg (a cura di), *Rational numbers. An integration of research,* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 13-47.

Bobis J., Mulligan J. e Lowrie T. (2013), *Mathematics for children. Challenging children to think mathematically,* Malaysia, Pearson Australia.

Brousseau G. (1983), *Les obstacles épistémologiques et les problémes en mathématiques,* «Recherche en Didactique des Mathématiques», vol. 4, n. 2, pp. 165-198.

Brousseau G., Brousseau N. e Warfield V. (2004), *Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurements,* «Journal of Mathematical Behavior», vol. 23, pp. 1-20.

Campolucci L., Fandiño Pinilla M.I., Maori D. e Sbaragli S. (2006), *Cambi di convinzioni della pratica didattica concernente le frazioni,* «La Matematica e la sua Didattica», vol. 3, pp. 353-400.

Charalambous C.Y. e Pitta-Pantazi D. (2005), *Revisiting a theoretical model on fractions. Implications for teaching and research.* In H.L. Chick e J.L. Vincent (a cura di), *Proceedings of the 29th PME International Conference,* vol. 2, pp. 233-240.

Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,* Berne, Peter Lang.

Fandiño Pinilla M.I. (2007), *Fractions. Conceptual and didactic aspects,* «Acta Didactica Universitatis Comenianae», vol. 7, pp. 23-45.

Halford G.S., Nelson C. e Andrews G. (2007), *Separating cognitive capacity from knowledge. A new hypothesis,* «Trends in Cognitive Science», vol. 11, pp. 236-242.

Iuculano T. e Butterworth B. (2011), *Understanding the real value of fractions and decimals,* «The Quarterly Journal of Experimental Psychology», vol. 64, n. 11, pp. 2088-2098.

Kieren T.E. (1976), *On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers.* In R. Lesh (a cura di), *Number and measurement. Papers from a research workshop,* Columbus, OH, ERIC/SMEAC, pp. 101-144.

Kieren T.E. (1980), *The rational number construct, its elements and mechanisms.* In Id. (a cura di), *Recent research on number learning,* Columbus, OH, ERIC/SMEAC, pp. 125-150.

Kieren T.E. (1988), *Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development.* In J. Hiebert e M. Behr (a cura di), *Number concepts and operations in the middle grades,* Reston, VA, National Council of Teacher Mathematics-Lawrence Erlbaum Ass., pp. 162-181.

Kieren T.E. (1992), *Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge. Implications for curriculum and instruction.* In R. Leinhardt, R. Putnam e R.A. Hattrup (a cura di), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching,* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 323-371.

Kieren T.E. (1995), *Creating spaces for learning fractions.* In J.T. Sowder e B.P. Schappelle (a cura di), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades,* Albany, State University of New York Press, pp. 31-66.

Lamon S. (1999), *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers,* London, Erlbaum.

Lamon S.L. (2001), *Presenting and representing. From fractions to rational numbers.* In A. Cuoco e F. Curcio (a cura di), *The roles of representations in school mathematics,* Reston, VA, National Council of Teacher Mathematics, pp. 146-165.

Lewis C.C. e Perry R.R. (2015), *A randomized trial of lessons study with mathematical resource kits. Analysis of impact on teachers' beliefs and learning community.* In J.A. Middleton et al. (a cura di), *Large-scale studies in mathematics education,* Research in Mathematics Education, pp. 133-158.

Ni Y. e Zhou Y-D. (2005), *Teaching and learning fraction and rational numbers. The origins and implications of whole number bias,* «Educational Psychologist», vol. 40, pp. 27-52.

Robotti E., Censi A., Peraillon L. e Segor I. (2016), *Frazioni sul filo. Strumenti e strategie per la scuola primaria,* Trento, Erickson.

Siegler R.S., Fazio L.K., Bailey D.H. e Zhou X. (2013), *Fractions. The new frontier for theories of numerical development,* «Trends in Cognitive Sciences», vol. 17, n. 1, pp. 13-14.

Robotti E. (2016), *Frazioni sul filo. Proposte e strategie per la scuola primaria,* «Difficoltà di Apprendimento e Didattica Inclusiva», vol. 3, n. 4, pp. 449-467, doi: 10.14605/DADI341607