in questo numero

RIVISTA TRIMESTRALE

Fondata come
IL BOLLETTINO DI MATEMATICA
nel 1902 da Alberto Conti

4
2020

ISBN 978-88-00-88131-9
9 788800 881319

Le Monnier

02004
9 770390 554001

ISSN 0390-5543

Illustrazione di copertina di Lorenzo Palloni

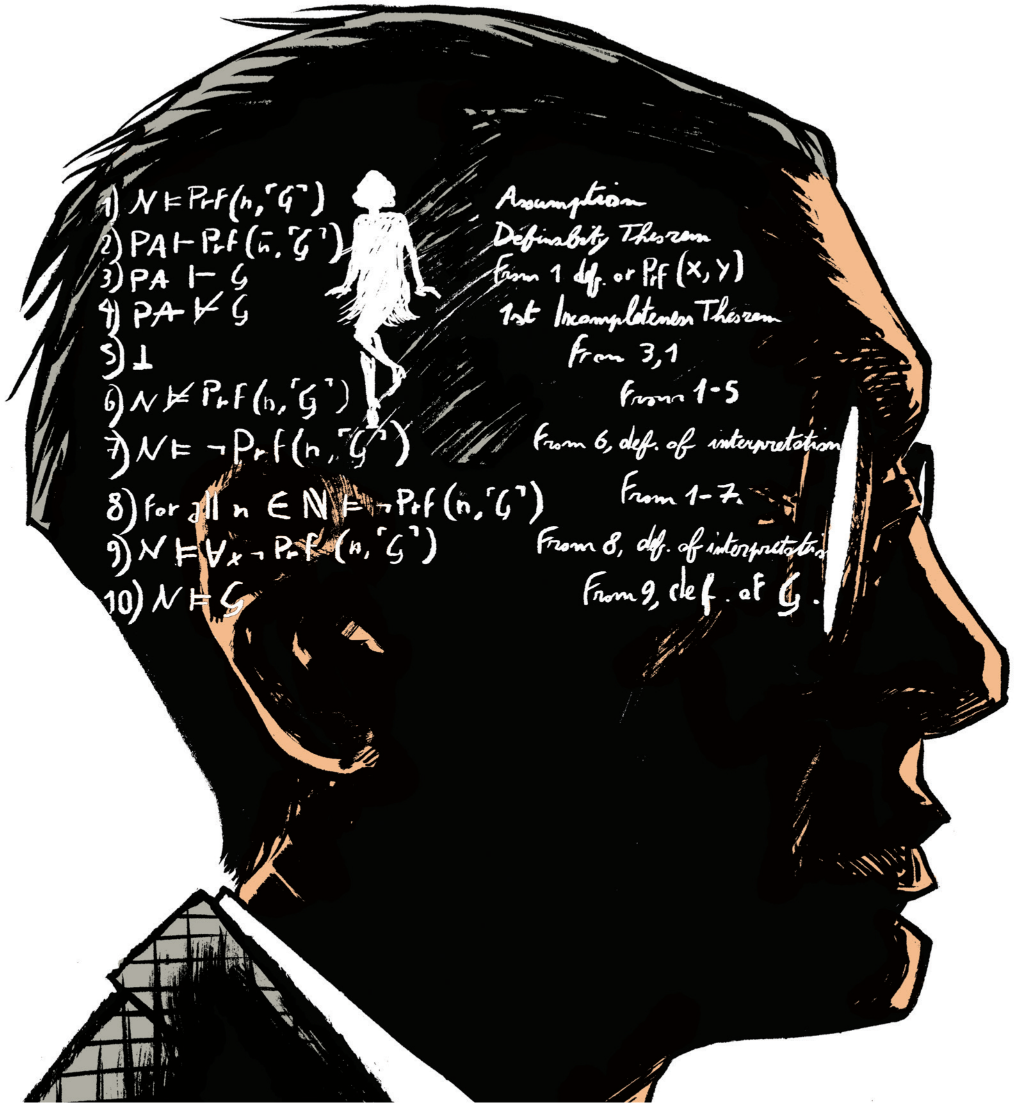
Poste Italiane S.p.A. - Spedizione in Abbonamento Postale Aut. MBPA/LO-NO/027/A.P./2019 - Periodico ROC – LO/MI

Prezzo del presente fascicolo Euro 7,50

Archimede

RIVISTA PER GLI INSEGNANTI E I CULTORI DI MATEMATICHE PURE E APPLICATE

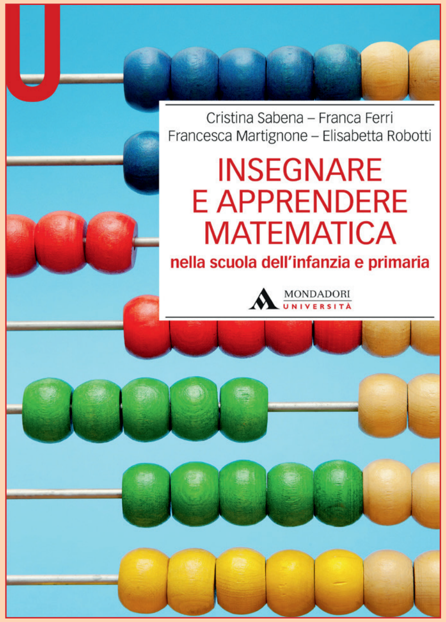
ANNO LXXII OTTOBRE-DICEMBRE 2020 **4/2020**



Le Monnier

Cristina Sabena – Franca Ferri
Francesca Martignone – Elisabetta Robotti

Insegnare e apprendere matematica nella scuola dell'infanzia e primaria



Mondadori Università / Manuali
Serie "I saperi dell'educazione"
diretta da Giorgio Chiosso

pubblicazione: maggio 2019
pagine: VIII-296
ISBN 978-88-6184-562-6
euro 25,00

Le autrici

Cristina Sabena è professore associato presso il Dipartimento di Filosofia e Scienza dell'Università di Torino, dove è docente di Fondamenti e didattica della matematica per il Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria da diversi anni.
Franca Ferri è stata insegnante di scuola primaria. È insegnante-ricercatrice presso il Nucleo di ricerca in didattica della matematica dell'Università di Modena e Reggio Emilia e collabora da anni con INVALSI alla costruzione delle prove per la scuola primaria.
Francesca Martignone è ricercatrice in Didattica della Matematica presso il Dipartimento di Scienze e Innovazione Tecnologica dell'Università degli Studi del Piemonte Orientale e svolge da anni attività di formazione per docenti del primo e del secondo ciclo d'istruzione.
Elisabetta Robotti è professore associato presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova e docente di Fondamenti e Didattica della Matematica nel corso di Laurea di Scienze della Formazione Primaria.

Il testo

Questo libro è rivolto agli studenti di Scienze della Formazione Primaria, che desiderano diventare insegnanti della scuola primaria e dell'infanzia e che affrontano corsi di Didattica della Matematica, e a tutti gli insegnanti in servizio che sentono il bisogno di approfondire argomenti e metodologie per progettare percorsi didattici di matematica che siano in linea con le Indicazioni Nazionali per il primo ciclo d'istruzione e con i risultati della ricerca recente. Per questo, attraverso il ricorso a molti esempi e a un linguaggio semplice, il volume tratta sia temi di natura più teorica, sia analisi di attività didattiche sperimentate nelle classi. Sono inoltre presenti collegamenti con le Prove INVALSI di Matematica e riflessioni su queste. Pur senza rinunciare alla complessità delle questioni trattate, si è cercato di rendere il testo accessibile fin dal primo anno degli studi universitari.

MODALITÀ DI ABBONAMENTO

Abbonamento per quattro numeri	per l'Italia	Euro 27,00
	per l'Estero	Euro 53,70

Se vuoi abbonarti:
https://www.abbonamenti.it/vincolata/archimede
Se vuoi abbonarti usando la carta docente:
https://www.abbonamenti.it/cartadeldocente?testataFiltro=956
Se vuoi ricevere informazioni:
riccardo.alessi@mondadori.it

Sul sito www.torrossa.it è possibile acquistare la ***versione digitale*** dei fascicoli arretrati (Permalink: http://digital.casalini.it/22396314).

NORME PER I COLLABORATORI DELLA RIVISTA PER L'ANNO 2021

Archimede ospita principalmente contributi di riflessione su aspetti epistemologici della matematica, di matematica elementare, di didattica della matematica, di divulgazione della matematica per i quali sia evidente la significatività e l'originalità per un determinato pubblico di riferimento: ricercatori, cultori, insegnanti, studenti.
I contributi possono essere inviati in formato elettronico al direttore Roberto Natalini per posta elettronica (roberto.natalini@cnr.it), in un file in formato pdf (le immagini, con una definizione minima di 300 dpi, dovranno essere incluse nel testo).
Detti contributi dovranno essere accompagnati da un messaggio contenente la presentazione dell'articolo, in cui vengano evidenziati il tipo di pubblico per cui sono pensati e in che modo l'autore pensa che l'articolo sia adatto per quel pubblico specifico. In particolare le finalità didattiche e/o divulgative dell'articolo dovranno essere esplicitate ed argomentate per render più agevole e pertinente la valutazione dell'articolo.

Redazione: **Archimede** – Via Raffaello Lambruschini, 33 – 50134 Firenze – tel. 055-5083223. Indirizzo di posta elettronica: mongatti@lemonnier.it.
Amministrazione e Ufficio Abbonamenti: **Mondadori Education S.p.A. Servizio Periodici** – Via Raffaello Lambruschini, 33 – 50134 Firenze – tel. 055-5083220. Indirizzo di posta elettronica: riccardo.alessi@mondadori.it.

- Gli Autori riceveranno una sola volta le bozze del loro contributo, esclusivamente per riportare correzioni per errori di stampa.
- Gli Autori riceveranno un estratto in formato pdf.
- Degli scritti originali pubblicati su questa Rivista è riservata la proprietà letteraria.

Archimede sul web:
http://riviste.mondadorieducation.it/archimede/

Consiglio Nazionale delle Ricerche
Ufficio Stampa

Direttore responsabile: Aaron Buttarelli

Iscritto nel Registro del Tribunale di Firenze al n. 79 in data 5-III-1949 – Poste Italiane s.p.a. – Spedizione in A.P. - D.L. 353/03 (conv. in L. 27/02/04 n. 46) art. 1, comma 1 - DCB Firenze

Rotomail Italia S.p.a. – Vignate (MI) – Dicembre 2020

Archimede

Quest'ultimo numero del 2020 di *Archimede* si apre con due articoli di didattica in cui si discute di come adattare alcune attività alla didattica a distanza. Il primo è di Alessandro Ramploud ed è dedicato all'argomentazione, che viene «intesa come 'via maestra' per la costruzione di significati e specificamente di significati matematici», e di argomentazione parla anche il contributo che trovate in Archimede Logica. Il secondo articolo è di Silvia Funghi e Roberta Munarini, che presentano un'attività relativa al progetto PerContare sulla divisione detta «per svuotamento». Il terzo è invece una riflessione di Biagio Sarnataro sulla filosofia della matematica, fatta a partire dalla rilettura di Gabriele Lolli delle Lezioni americane di Calvino, in un percorso che incontra la grande letteratura e le idee di Barrow e Gowers. Nelle rubriche, segnaliamo che questa volta i Rudi Mat(h)ematici ci parlano dei tre nomi di Leonardo Pisano (quali saranno gli altri due?). E in tutto questo, Archimedia non poteva che ospitare finalmente un fumetto dedicato a Kurt Gödel. Il fumettista toscano Lorenzo Palloni ci racconta in due tavole la vita del più grande logico dai tempi di Aristotele, a cui dedica la copertina, che è già stata definita «la rappresentazione di Gödel più umana che ci sia mai capitata di vedere».

Le Monnier

SOMMARIO

ARTICOLI

RUBRICHE

ARCHIMEDE LOGICA

Educare ad argomentare in matematica: problemi aritmetici nella scuola primaria

di Franca Ferri, Francesca Martignone,
Elisabetta Robotti e Cristina Sabena

Spesso, quando si pensa ai problemi aritmetici svolti nella scuola primaria e nella scuola secondaria di primo grado, il calcolo è visto essenzialmente come *procedura*. Le *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* [5] e la ricerca in didattica della matematica, propongono di sfruttare le attività di calcolo anche come occasione di *ragionamento*.

In quest'ottica, nella scuola primaria, può essere molto efficace sfruttare i contesti reali conosciuti dagli allievi nei quali possano mettere in atto strategie diverse e personali per usare le operazioni come strumento di soluzione di problemi. Un contesto particolarmente adatto per sviluppare attività di calcolo e riflessione sui numeri razionali è quello legato alla compravendita, all'acquisto di oggetti e all'interpretazione di scontrini. Le operazioni di moltiplicazione e divisione con numeri razionali possono quindi acquisire significato attraverso opportune attività in questi contesti, che in questo modo possono diventare «campi di esperienza» condivisi. Per «campo di esperienza» si intende un ambito dell'esperienza (attuale o potenziale) degli studenti con caratteristiche che lo rendono adatto per lo sviluppo di attività didattiche che permettono di attivare, sotto la guida dell'insegnante, specifici comportamenti evocati da parole e segni utilizzati in attività di *problem posing* e *problem solving* [3].

Le difficoltà di allievi di ogni età sui numeri razionali sono state ben indagate dalla letteratura in didattica della matematica che vi ha dedicato grande attenzione fin dagli anni Ottanta. Per quanto riguarda il calcolo con i numeri razionali, si riscontrano in allievi di diversi gradi scolari, misconcezioni tipiche quali «moltiplicare significa aumentare», «dividere significa diminuire», «il dividendo deve sempre essere maggiore o uguale al divisore», ecc.

Di seguito presenteremo degli esempi di attività in cui si affrontano esplicitamente con gli allievi queste misconcezioni attraverso una attenta discussione matematica sulle informazioni presenti in uno scontrino. Il punto di forza è che i dati contenuti in uno scontrino sono dati reali e questo induce gli allievi a interpretarli tenendoli ancorati al contesto, dando così importanza alla significatività delle operazioni tra i numeri in essi contenuti e alla ricerca di un senso per le operazioni aritmetiche ad esso ricollegabili.

Un secondo elemento fondamentale nelle attività di insegnamento-apprendimento di cui tratteremo è *l'argomentazione*. Nell'ottica dello sviluppo di una cittadinanza attiva e consapevole ogni persona dovrebbe essere «disponibile all'ascolto attento e critico dell'altro e a un confronto basato sul riferimento ad argomenti pertinenti e rilevanti. In particolare l'educazione all'argomentazione può costituire un antidoto contro il proliferare d'informazioni false o incontrollate» (p. 12) [6]. Un cittadino non solo dovrebbe saper riconoscere o sapere che qualcosa è vero, ma comprendere perché è vero e sostenere il proprio punto di vista con argomenti pertinenti, analizzando criticamente le informazioni in suo possesso.

Le competenze argomentative possono essere sia di carattere trasversale (per sostenere le proprie idee confrontandosi con altri), sia strettamente legate alla materia in cui si producono (pensiamo alle argomentazioni in matematica o in campo giuridico) e possono essere sviluppate nel tempo nei diversi gradi scolari. Argomentare in matematica ha le sue peculiarità e gli studi in didattica della matematica sull'argomentazione sono numerosi e vari: per una presentazione delle ricerche su questo tema rimandiamo a [2].

In questo contributo mostreremo attività focalizzate sull'argomentazione nella scuola primaria, progettate e sperimentate dall'insegnante Franca Ferri. Gli estratti di discussione e i protocolli degli studenti mostrano le argomentazioni sviluppate durante le attività di risoluzione di problemi aritmetici. Tali argomentazioni sono prodotte per sostenere o confutare enunciati il cui giudizio di validità dipende dal contesto specifico e sono strettamente legate alla comunità della classe in cui si sviluppano [8].

1. ESEMPI DI ATTIVITÀ DIDATTICHE

Le attività didattiche in cui si richiede di interpretare i numeri presenti su scontrini [4] e in generale l'affrontare situazioni problematiche in contesti monetari possono favorire riflessioni significative su proprietà dei numeri razionali e delle operazioni con questi. Ad esempio, in uno scontrino si possono leggere numeri razionali scritti in notazione decimale e messi in stretta relazione attraverso le operazioni aritmetiche. Sono proprio questi aspetti relazionali che si vogliono mettere in evidenza con le attività didattiche presentate di seguito.

1.1 PROBLEMA DELLO SCONTRINO

All'inizio della classe quarta l'insegnante consegna a ogni alunno la copia di uno scontrino non fiscale (Figura 1) e apre una discussione collettiva chiedendo di individuare le operazioni eseguite dalla macchina calcolatrice per rilasciare quello scontrino. Si vuole in questo modo focalizzare l'attenzione degli studenti su una lettura relazionale dei dati numerici.

Risolvere un problema aritmetico non è più solo l'occasione per applicare regole conosciute per raggiungere uno scopo, ma diviene un'attività volta a una comprensione relazionale. Questo approccio può portare a risultati migliori e che perdurano nel tempo.

FORNO DEL CORSO

28 – APR – 11 13:15

kg	EURO/kg	EURO
0,176	4,30	0,76
0,285	7,00	2,00
articoli 2	TOTALE	2,76

ARRIVEDERCI E GRAZIE

Figura **1** – Lo scontrino al centro della discussione matematica

La discussione comincia con la domanda posta dall'insegnante: «Che operazioni sono state eseguite dalla macchina?». Di seguito riportiamo alcune parti della discussione dove emergono le argomentazioni degli studenti, intervallate da brevi commenti nei quali metteremo in luce i riferimenti agli aspetti matematici e al campo di esperienza dello scontrino. Inoltre, nelle argomentazioni degli studenti emerge anche un significativo intreccio tra processi abduttivi e deduttivi.

Ju. - *Per me fanno una divisione: 0,176 diviso 4,30*

So. - *L'operazione che ha detto Ju., e poi l'hanno detto anche degli altri, per me non va bene, perché 0,176 è minore di 4,30, quindi non si può dividere. Per me non è una divisione. Io sto pensando e provando, ma non mi viene …Forse bisognerebbe fare il contrario di ciò che ha detto Ju., cioè 4,30 diviso 0,176.*

Ju. ipotizza che l'operazione eseguita dalla macchina sia una divisione, probabilmente seguendo una misconcezione assai diffusa secondo cui «se dividi due numeri ottieni un risultato più piccolo». Invece nell'intervento di So. riscontriamo la misconcezione «si divide sempre un numero grande per uno più piccolo». Queste misconcezioni possono avere origine dall'esperienza con i calcoli con i numeri naturali.

Lu. - *Anche per me la macchina ha fatto delle divisioni. Io ho pensato: addizioni no perché il risultato sarebbe maggiore di 4, sottrazioni no perché risulterebbe un numero negativo, moltiplicazioni no perché il risultato sarebbe più grande e siccome il risultato è un numero piccolo ho pensato alle divisioni.*

Lu. esamina le possibili operazioni e, con un ragionamento basato su una sorta di '*logica del non*' [1], giunge a pensare che l'operazione fatta dalla macchina sia una divisione. Nella sua disamina segue ragionamenti corretti per quanto riguarda addizione e sottrazione, ma emergono evidenti le misconcezioni legate a moltiplicazione e divisione.

Successivamente, alcuni studenti propongono la moltiplicazione, come ad esempio Ar., che fornisce una argomentazione basata sul *significato* dei numeri nel contesto dello scontrino.

Ar. - *Per me ci sono due moltiplicazioni: 4,30 x 0,176 nella prima riga e nella seconda riga 7 x 0,285, perché così si vede quanti euro a chilogrammo stanno nel peso che tu hai acquistato.*
Ju. - *Anche io ci stavo pensando, ma non proprio così. Io pensavo di più alla divisione … … La moltiplicazione è strana*
Ins. - *La moltiplicazione sembra strana a tanti, ma perché?*

Dopo l'intervento dell'insegnante emergono in modo esplicito le misconcezioni degli studenti legate alle moltiplicazioni e divisioni tra numeri razionali non interi: era proprio questo l'obiettivo della domanda dell'insegnante.

Gi. - *Per me, il mio dubbio per la moltiplicazione era che alla fine il risultato 0,76 era minore. Moltiplichiamo e otteniamo un numero piccolo, minore di 4,30. Questo è stranissimo!*
Lo. - *Anche per me quello era il mio dubbio, perché di solito nelle moltiplicazioni viene un risultato maggiore.*

Nelle parole di Lo. la locuzione «di solito» segnala che lo studente inizia forse ad avere qualche dubbio sulla misconcezione («il risultato di una moltiplicazione è sempre un numero maggiore dei fattori»); anche qui l'insegnante interviene, in questo caso attraverso un controesempio, per innescare la messa in crisi della misconcezione:

Ins. - *Ah sì? E 128 x 0 cosa fa?*

Lo. - *Zero, ma allo zero non ci avevo pensato. Pensavo in generale che se moltiplichi, aumenti.*

Interessante vedere che, nel suo 'pensare in generale', Lo. non include lo zero perché lo zero è considerato come un caso particolare. In matematica pensare in generale richiede invece di considerare tutti i casi, anche quelli particolari o casi limite come per esempio qui moltiplicare per zero. Vista la rilevanza di questo tipo di riflessioni nello sviluppo del pensiero matematico, è importante che esse siano affrontate, con una didattica adeguata, fin dalla scuola primaria, anche se poi saranno oggetto di studio esplicito nei gradi successivi.

Ar. - *Noi ci dimentichiamo perché non pensiamo molto. Però qua dovevi capire che per trovare quanto pagavi quello che avevi comperato dovevi moltiplicare il peso per gli euro al chilo. Non dovevi certo dividere!*
[...] *Io ho provato a fare le due moltiplicazioni e in nessuna delle due mi viene il risultato uguale a quello che c'è scritto nello scontrino. Subito mi sono detta «Ma ho sbagliato?» Io non avevo dubbi perché ero certa che ci andasse una moltiplicazione, allora ho pensato che la macchina togliesse tutti quei decimi di centesimi che nella realtà non esistono.*

Ar. nelle prime righe del suo intervento riflette sull'importanza di comprendere la situazione problematica, e quindi sulle relazioni semantiche tra i valori numerici, basandosi su considerazioni legate ai significati dei numeri in gioco (piuttosto che su considerazioni relative ai possibili risultati delle operazioni ipotizzate). Ar. fornisce una giustificazione semantica del perché in questa situazione fosse necessario moltiplicare, ma la sua ipotesi non è sostenuta dai risultati numerici delle operazioni che prova a svolgere. Di nuovo, interpreta i valori trovati in relazione al contesto e giustifica la discrepanza riscontrata: trattandosi infatti di prodotti di fattori riferiti a una situazione reale di costi in euro, automaticamente la macchina arrotonda.

1.2 PROBLEMA DEL COSTO DELLA FOCACCIA

Riportiamo ora un esempio di un problema in cui si hanno come dati la quantità di prodotto e il prezzo pagato, e si richiede il prezzo al chilo. Anche questo problema propone una situazione realistica dove possono emergere concezioni e misconcezioni sulle proprietà delle operazioni di moltiplicazione e divisione di numeri razionali.

Al forno vicino a casa mia ho acquistato 0,125 kg di focaccia.
Un'amica, a cui l'ho offerta, l'ha trovata molto buona e ha pensato di acquistarne anche lei. Mi ha chiesto il suo costo al chilo, ma io non mi ricordavo. So di aver pagato per la mia quantità 1,35 euro.
Quanto costa la focaccia al chilo in quel forno?
Risolvi il problema e spiega come hai proceduto.

Dagli estratti della discussione collettiva iniziale sul problema emerge in particolare il misconcetto, spesso latente negli allievi di questa età, che nella divisione il quoziente debba essere minore del dividendo. Inoltre, rileviamo che nelle considerazioni degli studenti si combinano tre piani: un piano *epistemico* (relativo alle conoscenze, come ad esempio nel primo intervento di So.), un piano *cognitivo* (i processi di pensiero, ad esempio nell'intervento di Es.) e un piano *metacognitivo* (riflessione sui processi di pensiero, come ad esempio negli intervento di Mo. e Lo.). Possiamo notare come emergano i processi deduttivi declinati nel linguaggio dei bambini, che coinvolgono il «se fosse» (ad esempio nell'intervento di Em.) e la già citata «logica del non» (ad esempio nell'ultimo intervento di So.).

Gi.: *Mi verrebbe subito da pensare che per trovare il costo al chilo, che sarà maggiore di 1,35 bisogna moltiplicare.*
So.: *Sì, però noi abbiamo già visto che moltiplicare per zero virgola qualcosa viene un risultato minore, quindi non bisogna moltiplicare, ma fare l'incontrario cioè dividere.*
Da.: *Si capisce anche se guardi i numeri 0,125, che è piccolissimo, sarà contenuto tante volte nel 1,35.*
Mo.: *Ma anche questo è strano. Dividi e hai un risultato maggiore di quello che dividi. Io non ci avrei pensato e avrei fatto subito una moltiplicazione.*
Es.: *Se guardavi i numeri capivi anche senza fare l'operazione che il costo al chilo sarebbe stato circa 12 euro, perché un po' più di un etto costa 1,35.*
Lo.: *Ma noi ci facciamo sempre imbrogliare da moltiplicare e dividere perché pensiamo che se moltiplichi ne hai di più e se dividi ne hai di meno. Ci caschiamo sempre.*
Em.: *Io pensavo di fare così: 0,125 kg è un etto e 25 grammi. Un etto e 25 grammi costano 1,35 euro. Se fosse solo un etto costerebbe circa 13,5 euro al chilo. Siccome è di più di un etto io direi che al chilo costa circa 11 euro.*
So.: *Se facciamo la divisione ci conviene fare 1350:125, cioè moltiplicare tutti e due i numeri per 1000 così la divisione diventa più facile e si capisce meglio il risultato.*

Dopo questa discussione, gli studenti hanno scritto individualmente le loro riflessioni e argomentazioni a sostegno delle procedure di calcolo necessarie per risolvere il problema: ne riportiamo due esempi.

GI.: *Come ho anche detto subito ho pensato di fare 0,125 x 1,35 perché a me per trovare un costo più grande di quello che ho viene subito da pensare all'addizione o alla moltiplicazione. Poi prima di risolverlo ne abbiamo parlato e la So. ha spiegato bene che se si moltiplica per un numero minore di 1 il risultato diventa più piccolo, infatti se io faccio con la calcolatrice 0,125 x 1,35 mi viene 0,16875 e capisco bene che non ha senso perché un chilo di focaccia non può costare meno di 125 grammi. Allora faccio la divisione e faccio 1350:125 (Come ha detto la So. è più facile) e vedo che il risultato è 10,8 e questo ha più senso. Un chilo di focaccia costa 10,80 euro.*

L'argomentazione di Gi. non si basa solo su conoscenze e relazioni di tipo strettamene matematico, ma si basa anche su conoscenze della realtà (un costo possibile della focaccia). Sullo sfondo c'è anche l'idea di proporzionalità intesa come aumento del prezzo all'aumentare della quantità.

DA.: *Se 0,125 Kg costano 1,35 euro, 1 kg costerà di certo meno di 13,5 euro al chilo perché 125 g > 100 g. Io faccio 1,35:0,125 = 10,8 e così trovo il costo al chilo della focaccia.*

Nella spiegazione di Da. troviamo un ragionamento di tipo deduttivo in cui gestisce una relazione tra le quantità e le operazioni da svolgere per risolvere il problema.

2. CONCLUSIONI

In questo contributo abbiamo mostrato alcune attività didattiche svolte nella scuola primaria nelle quali la discussione e l'analisi di problemi aritmetici nel campo d'esperienza degli scontrini sono stati usati per il superamento di misconcezioni, per la costruzione di conoscenze e per lo sviluppo di argomentazioni relative alle operazioni con i numeri razionali. Nei brevi commenti abbiamo sottolineato come il campo d'esperienza dia significato ai contenuti matematici e, insieme alla richiesta costante di *argomentare*, contribuisca alla costruzione di conoscenze e abilità relative alle operazioni di moltiplicazione e divisione con numeri razionali, non interi, in forma decimale. Nell'analizzare gli estratti di discussioni e le risposte degli studenti sono stati considerati diversi aspetti legati alle conoscenze dei numeri razionali e delle operazioni tra questi, ai processi risolutivi, al tipo di argomentazioni prodotte e alle riflessioni che gli studenti condividono.

Per approfondimenti su questi temi e per l'analisi di altri esempi di attività didattiche svolte nella scuola primaria si rimanda al libro scritto dalle autrici di questo contributo [7].

Franca Ferri
Insegnante di scuola primaria – franca.ferri.169@gmail.com

Francesca Martignone
Università del Piemonte Orientale – francesca.martignone@uniupo.it

Elisabetta Robotti
Università di Genova – robotti@dima.unige.it

Cristina Sabena
Università di Torino – cristina.sabena@unito.it

Riferimenti bibliografici

[1] F. Arzarello, C. Sabena, *Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities*, in «Educational Studies in Mathematics», 77(2), pp. 189-206.
[2] A. Baccaglini-Frank, P. Di Martino, R. Natalini, G. Rosolini (2018), *Didattica della matematica*, Milano, Mondadori Università.
[3] P. Boero (1990), *L'insegnamento della matematica nel progetto «Bambini, Maestri, Realtà»*, in «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», 13, pp. 7-43.
[4] C. Bonotto (1999), *Sull'uso di artefatti culturali nell'insegnamento-apprendimento della matematica*, in «L'educazione Matematica», 1(2), pp. 62-95.
[5] MIUR (2012), *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*: http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/istruzione/prot7734_12.
[6] MIUR (2018), *Indicazioni nazionali e nuovi scenari*: http://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+nazionali+e+nuovi+scenari/3234ab16-1f1d-4f34-99a3-319d892a40f2.
[7] C. Sabena, F. Ferri, F. Martignone, E. Robotti (2019), *Insegnare e apprendere matematica nella scuola dell'infanzia e primaria*, Milano, Mondadori.
[8] A. J. Stylianides (2007), *Proof and proving in school mathematics*, in «Journal for Research in Mathematics Education», 38(3), pp. 289-321.