Geometria alla scuola dell'infanzia: una pseudo-definizione di circonferenza

Geometry in kindergarten: a pseudo-definition of circumference

Elisabetta Robotti
Dipartimento di Matematica – Università di Genova, Italia

Sunto / Il presente articolo illustra un percorso didattico sulla circonferenza condotto nella scuola dell'infanzia con bambini di 4-5 anni. Nel percorso, progettato in accordo con il quadro teorico della Mediazione Semiotica e basato su un approccio multimodale, i bambini arrivano a produrre una "pseudo-definizione" di circonferenza (Robotti, 2018). In essa, infatti, sono usate parole che si riferiscono a elementi percettivi legati alla forma, anche se è possibile identificare la natura dinamica della curva come traccia generata dal movimento di un punto. L'analisi del percorso didattico evidenzia il ruolo di mediazione sia dell'insegnante sia degli artefatti utilizzati, al fine di trasformare segni legati all'uso dei diversi artefatti in contesti percettivi e motori, in segni matematici legati al concetto geometrico di circonferenza.

Parole chiave: multimodalità; oggetti geometrici; invarianti geometriche; segni; mediazione semiotica.

Abstract / This paper deals with a teaching experiment concerning the notion of circumference in a geometrical context, conducted in kindergarten with children aged 4-5. Through a classroom-based intervention, designed according to the Semiotic Mediation theoretical framework and developed on a multimodal approach, children produce a "pseudo-definition of circumference" (Robotti, 2018), which still refers to perceptual elements linked to the shape, but where it is possible to identify the dynamic nature of the curve as a trace generated by the movement of a point. The analysis of the teaching experiment highlights the specific roles of the teacher and of artifacts in supporting the process of semiotic mediation through which the children and the teacher transform the signs linked to artifacts into mathematical signs.

Keywords: multimodality; geometrical objects; geometrical invariants; signs; semiotic mediation.

1 Introduzione

I concetti di spazio e di sistema di riferimento spaziale sono molto importanti per lo sviluppo psicologico e culturale dei bambini (Indicazioni Nazionali per il curriculo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione, 2012). Bartolini Bussi (2008) considera diversi tipi di esperienze che si riferiscono allo spazio (lo spazio del corpo, gli spazi esterni e lo spazio astratto) mettendo in evidenza come esse siano legate a diverse attività cognitive e a diverse abilità in contesti specifici. Così, il passaggio progressivo dallo *spazio del corpo*, dove la percezione sensoriale definisce le forme, agli *spazi rappresentativi*, dove gli oggetti sono rappresentati come forme, per arrivare allo *spazio della geometria*, dove le figure geometriche sono identificate mediante le loro caratteristiche geometriche, costituisce una delle idee centrali dell'insegnamento e apprendimento della geometria. Con ciò, non ci riferiamo a un modello di apprendimento geometrico gerarchico. Di fatto, recenti ricerche si sono poste in contrasto con le opinioni di Piaget e Van Heile che descrivevano il pensiero geometrico attraverso un modello gerarchico formato da livelli in cui lo spazio astratto è posto

alla fine del processo evolutivo del bambino (Owens, 2015).
Anche se la definizione di figura geometrica non appare esplicitamente nei curricula fino alla metà della scuola elementare, la ricerca ha mostrato come la geometria abbia una base esperienziale intuitiva ben prima della scuola elementare (Bryant, 2008). Infatti, la letteratura riporta numerose ricerche riguardanti le esperienze di insegnamento della geometria già nella scuola dell'infanzia (Sinclair & Moss, 2012; Bartolini Bussi & Baccaglini-Frank, 2015). Secondo queste ricerche, lo sviluppo delle competenze spaziali dei bambini, così come la loro capacità di orientarsi nello spazio, sono nodi cruciali nella concettualizzazione dello spazio geometrico. Anche le esperienze corporee e quelle mediate dall'uso di strumenti, sembrano essenziali, perché fungono da ponte tra la modellizzazione fisica dello spazio e la concettualizzazione di uno spazio geometrico.
Così, sulla base di queste premesse, credo sia possibile esplorare la geometria già durante gli anni della scuola dell'infanzia, in maniera più consistente di quanto non si stia facendo al momento, almeno in Italia.
Questo studio si propone quindi di illustrare un percorso didattico per la scuola dell'infanzia, progettato coerentemente con il quadro concettuale della Mediazione Semiotica, in cui i bambini hanno fatto esperienza di una figura vicina, ma non completamente isomorfa, alla definizione di circonferenza. Da un punto di vista metodologico, l'obiettivo è mostrare come un approccio multimodale nelle attività della scuola dell'infanzia possa promuovere efficacemente l'esplorazione di figure in senso geometrico. A questo scopo mostrerò come i bambini arrivano a costruire una "pseudo-definizione di circonferenza" che, seppur ancora riferita a elementi percettivi legati alla forma, rimanda alla natura dinamica della curva come traccia del movimento di un punto.

2 Quadro teorico di riferimento

In questa ricerca la Teoria della Mediazione Semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), sviluppata per progettare e analizzare le attività didattiche, è il quadro metodologico di riferimento. La teoria fornisce un utile strumento per studiare il processo attraverso il quale l'attività didattica con artefatti può essere trasformata in efficace attività d'insegnamento-apprendimento della matematica.
Riassumendo i principali elementi della Teoria della Mediazione Semiotica (per maggiori dettagli, si veda Bartolini Bussi & Mariotti 2008), diciamo che l'insegnante ha la responsabilità di due principali processi: la progettazione delle attività e il loro funzionamento. Nel primo, l'insegnante fa scelte mirate sugli artefatti da utilizzare, i compiti da proporre e la conoscenza matematica che sarà oggetto di insegnamento. Nel secondo processo, l'insegnante monitora e gestisce i processi osservabili degli studenti (dette tracce semiotiche), per decidere come interagire con gli studenti al fine di trasformare i segni legati all'uso di artefatti in segni matematici. Gli studenti, dal canto loro, devono risolvere il compito attraverso l'uso di artefatti esplicitamente proposti dall'insegnante allo scopo. L'uso dell'artefatto produce, inevitabilmente, segni (oggetti, disegni, parole, gesti, movimenti corporei e così via) contestuali all'artefatto stesso, che non sono ancora esplicitamente segni matematici. Compito dell'insegnante è dunque raccogliere tutti questi segni, analizzarli e organizzare un

percorso che ne consenta l'evoluzione verso segni matematici che sono in relazione con la conoscenza matematica obiettivo d'insegnamento. La Teoria della Mediazione Semiotica identifica tre principali categorie di segni: i segni legati agli artefatti, che si riferiscono all'uso contestuale dell'artefatto, i segni matematici, che si riferiscono al contesto matematico e i segni *pivot*, che fungono da ponte tra i segni artefatti e i segni matematici. L'evoluzione e il ruolo di questi segni e, in particolare, il ruolo dei segni *pivot*, sarà oggetto dell'analisi di questo articolo.
Inoltre, in questa ricerca consideriamo il processo d'insegnamento-apprendimento come un'attività multimodale (Nemirovsky, 2003). Il termine multimodalità (Gallese & Lakoff, 2005) è usato per porre l'accento sull'importanza e la coesistenza di una varietà di modalità o risorse cognitive, materiali e percettive, nei processi di insegnamento-apprendimento e, più in generale, nella costruzione di significati matematici (Radford, Edwards & Arzarello, 2009) e del "pensiero astratto" (Lakoff & Nùñez, 2000).
Nemirovsky (2003) afferma che, la comprensione e, più in generale il pensiero, incluso il pensiero matematico, sono attività percettivo-motorie, che diventano più o meno attive a seconda del contesto.
Ciò significa che, sfruttando le componenti percettivo-motorie, il corpo diventa essenziale nei processi di pensiero così come nei processi di apprendimento: fare, toccare, muovere, muoversi, vedere ecc., sono componenti essenziali nello sviluppo del processo di pensiero matematico – dalle fasi iniziali ai più avanzati processi di apprendimento (Arzarello, Pezzi & Robutti, 2007; de Freitas & Sinclair, 2013; Radford, 2014).
In questa ricerca, la multimodalità coinvolge in particolare il disegno, il gesto, la manipolazione di artefatti fisici e vari tipi di movimento corporeo (Robotti, 2018).

3 Metodologia

Il gruppo che ha preso parte al percorso didattico è di 21 bambini di età compresa tra 4 e 5 anni. Tre insegnanti sono state coinvolte durante le 13 sessioni sviluppate nell'anno scolastico 2017/18 per circa 5 settimane (più o meno due o tre volte a settimana). Gli insegnanti e un ricercatore (l'autore) hanno progettato il percorso didattico.
Le attività sono state sviluppate in gruppo o individualmente, in aula, in palestra o all'aperto sempre con la guida dell'insegnante.
Ogni sessione è stata attentamente documentata da uno degli insegnanti coinvolti, con la raccolta di foto, video e audio registrazioni, le trascrizioni dei dialoghi e gli appunti del diario di bordo degli insegnanti.
In quest'articolo si è scelto di non descrivere tutte le attività svolte, ma di concentrarsi solo su quelle più significative e ricche rispetto alla produzione di segni. In particolare, la descrizione del percorso didattico è organizzata tramite una sequenza di sessioni che, a volte, per questioni di economia e di spazio, comprendono la descrizione di più attività.
Per orientarsi fra le sessioni che saranno descritte, riteniamo possa essere utile al lettore una panoramica completa delle 13 attività didattiche che compongono il percorso.
Di seguito, quindi, ne sarà fornita una breve descrizione:

1. Si chiede ai bambini di costruire, in palestra, un percorso con materiali diversi (birilli, cerchi in plastica, mattoni in legno, bastoni, biglie in legno e in plastica ecc.). Si chiede loro di seguire il percorso commentando le azioni eseguite: "faccio la capriola", "scavalco il bastone", "salto dentro al cerchio", "tiro a canestro" ecc.
2. Si chiede ai bambini di disegnare dal vivo il percorso costruito in precedenza, ognuno da un punto di vista differente. In seguito, i bambini cambiano la loro postazione di lavoro e disegnano nuovamente il percorso per visualizzare e rappresentare gli oggetti del percorso da un altro punto di vista.
3. Si avvia una discussione sui lavori di rappresentazione del percorso ottenuto, evidenziando il ruolo dei punti di vista.
4. Si forniscono ai bambini cerchi in plastica e scatoloni e si chiede loro di giocare liberamente con questi oggetti. I bambini entrano ed escono da scatole e cerchi. Si chiede poi un'elaborazione grafica del gioco (rappresentazione sul foglio dei giochi; l'insegnante fa opera di "prestamano" per la scrittura della descrizione dei giochi).
5. Si propone ai bambini il gioco del topo-topolino: in giardino i bambini formano un cerchio tenendosi per mano. Un bambino entra all'interno del cerchio e assume il ruolo del topo, un altro rimane all'esterno del cerchio e assume il ruolo del gatto. Si procede con la recita di una filastrocca che dà avvio alla rincorsa del topo (uscito dal cerchio) da parte del gatto.
6. Si forniscono ai bambini diversi materiali che vengono posizionati sul pavimento della palestra: fogli A0, cerchi in plastica, pastelli. Si chiede ai bambini cosa si potrebbe fare con quel materiale. I bambini avanzano diverse proposte e poi, insieme all'insegnante, concordano a che ciascuno di loro sovrapponga un cerchio (in plastica) su un foglio, ne disegni il contorno, entri nel cerchio rappresentato e disegni liberamente sul foglio, fuori dal cerchio.
7. Si avvia una discussione collettiva sui significati di punto, linea e cerchio tramite la domanda stimolo: "che cosa sono, secondo voi un punto, una linea e un cerchio?". Alla discussione è associata un'attività di rappresentazione, sul foglio, di punti, linee e cerchi.
8. Si chiede ai bambini di rappresentare sul pavimento della palestra un cerchio utilizzando diverso materiale (cubi in legno di dimensioni diverse, bastoni di lunghezze e spessori differenti, palline in legno o in altro materiale ecc.).
9. Si chiede ai bambini di cooperare per costruire un unico cerchio con il materiale a disposizione. Spontaneamente, terminato il compito, i bambini entrano all'interno del grande cerchio e, raggomitolandosi su se stessi uno accanto all'altro, riproducono un cerchio.
10. Si chiede ai bambini di posizionarsi in piedi e riprodurre il cerchio di bambini dandosi la mano. I bambini concordano nel posizionare, all'interno del cerchio, un mattoncino in legno e dichiarano che esso occupa la posizione centrale.
11. L'insegnante procede con la domanda stimolo: «come si fa ad essere sicuri che il mattoncino di legno è proprio al centro?»; si procede con una discussione collettiva dove, come vedremo, emergono alcune invarianti della circonferenza (centro e distanza dal centro).
12. Si chiede ai bambini di rappresentare su un foglio una circonferenza usando un punto come centro e delle listarelle di carta come raggi.
13. Si fornisce materiale ai bambini per rappresentare, sul pavimento della palestra, una circonferenza che tenga conto delle invarianti identificate nella discussione

collettiva (centro e raggio). Si chiede di fornire una descrizione di cerchio tramite la domanda stimolo: «se dovessimo raccontare ad altri bambini che cosa è un cerchio, cosa direste?».

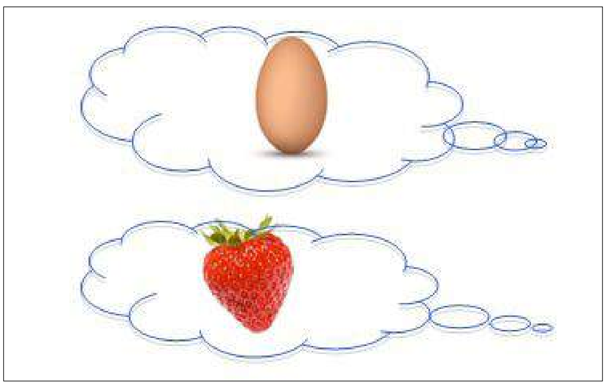
3.1 Sessione 1: perché la scelta della "circonferenza"

Gli insegnanti lavorano sull'orientamento spaziale, sui punti di vista e su nozioni topologiche come "dentro" e "fuori".

Figura 1
Spazio del corpo e spazio della realtà.

Figura 2
Spazio del corpo e spazio rappresentativo del foglio.

Viene chiesto dapprima ai bambini di costruire fisicamente (in palestra) un percorso con materiali diversi: cerchi in plastica, blocchi di legno, birilli ecc. Viene poi chiesto di posizionarsi dentro o fuori alcuni elementi del percorso come i cerchi di plastica o le scatole di cartone. È chiesto inoltre di costruire cerchi con materiale vario o con blocchi in legno (Figura 1) e di posizionarsi dentro o fuori di esso. Viene poi chiesto di rappresentare figure fuori dal cerchio (Figura 2). Infine, si chiede ai bambini di disegnare, su un foglio di carta, il percorso e i cerchi da diversi punti di vista.
Alcuni lavori sono motivo di discussione fra i bambini a causa dei disegni del "cerchio", perché non tutti sono accettati come rappresentanti della figura "cerchio".
L'insegnante rilancia la consegna chiedendo: «che cos'è un cerchio?». Come primo passo, i bambini categorizzano i disegni. Così, l'attenzione si concentra sugli aspetti narrativi come le possibili somiglianze/differenze tra le forme: i disegni sembrano uova, fragole e così via (Figura 3).



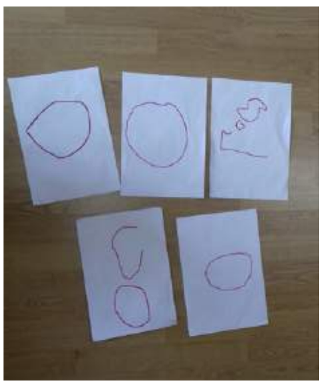


Figura 3
Riconoscimento delle somiglianze e differenze tra le forme.

Figura 4
Cerchi come curve chiuse e non cerchi come curve aperte.

Successivamente, i bambini passano ad una prima forma di generalizzazione distinguendo i cerchi come curve chiuse e i "non cerchi" come curve aperte (Figura 4). I bambini usano espressioni come: "Questo è un cerchio perché è attaccato, questo no perché è staccato".

Osserviamo come le attività cognitive dei bambini durante l'esplorazione siano influenzate dai diversi tipi di spazio in cui è chiesto loro di lavorare: nel micro-spazio del foglio (o spazio rappresentativo) dove disegnano un cerchio, l'esplorazione è possibile attraverso la vista e può essere assunto un unico punto di vista da cui si ha una visione globale dell'oggetto disegnato; invece, nel macro-spazio della palestra (o spazio del corpo), ogni bambino è incluso nello spazio stesso e l'esplorazione è possibile spostandosi al suo interno, assumendo diversi punti di vista. Nell'esplorazione di questi spazi, il sistema di riferimento è egocentrico e, a questo punto, i bambini identificano un cerchio come un "rotondo chiuso".

3.2 Sessione 2: costruzione di un cerchio

In questa sessione, viene chiesto ai bambini di costruire cerchi, ancora con i blocchi di legno (Figura 1) e, in seguito, tenendosi per mano (Figura 5) e viene chiesto di descrivere i cerchi.

Figura 5
Girotondo di bambini che si tengono per mano.

La finalità di queste consegne è consolidare la caratterizzazione della "forma rotonda chiusa" attraverso descrizioni che si sviluppano da diversi punti di vista.
Una volta realizzato il cerchio di bambini, spontaneamente P. prende la posizione centrale all'interno di esso dicendo: «Sono il centro del cerchio». Sappiamo che, almeno in Italia, sono numerosi i giochi che vedono i bambini tenersi per mano formando un cerchio e identificare posizioni privilegiate rispetto ad esso, come dentro o fuori. Non stupisce molto, quindi, che un bambino verbalizzi tale posizione come "il centro del cerchio". Siamo convinti però che la parola "centro" non rimandi qui al "centro geometrico" ma costituisca esclusivamente una etichetta per una posizione privilegiata dentro il cerchio di bambini.
In questa fase, possiamo identificare vari segni verbali e gestuali: alcuni bambini fanno ruotare il dito indice, un gesto significativo che serve per mostrare ai compagni come disporsi al fine di ottenere un cerchio. La rotazione dell'indice è un gesto

legato al concetto di traccia, simula cioè la traccia della circonferenza come "forma rotonda chiusa" e, per questo, è un gesto *iconico*. Osserviamo come qui, il cerchio di bambini (o di blocchi di legno), inteso come segno prodotto dai bambini stessi usando l'artefatto "blocchi di legno" o l'artefatto "bambini", ha ancora il significato di forma in senso statico perché è concepita come un insieme di punti (bambini o blocchi di legno). La parola "centro" si riferisce a una posizione privilegiata all'interno del cerchio, approssimativamente al suo centro. È un segno verbale cui i bambini non si riferiscono in termini di "punto", né esso viene messo in relazione ad una "misura" (lunghezza). Per questo, la parola assume il ruolo di segno *pivot* che l'insegnante dovrà trasformare in segno geometrico ("centro di una circonferenza").
Nelle due consegne è possibile osservare un cambio di punto di vista: usando i blocchi di legno per costruire un cerchio, i bambini assumono un punto di vista esterno rispetto al cerchio e hanno una visione globale di esso; nel cerchio di bambini, dove ciascuno di essi occupa il proprio posto nel cerchio, ogni bambino assume un punto di vista interno ed ha una visione parziale di esso.
Questo è vero per tutti i bambini ad eccezione di V. (bambina assai vivace che spesso prende l'iniziativa) che decide di uscire spontaneamente dal gruppo per descrivere il cerchio di compagni e la posizione di P. L'insegnante sa che V. ama essere al centro dell'attenzione e l'iniziativa di P. sembra averle "rubato la scena". Per questo, V. esce dal cerchio e comincia a descriverlo da una posizione esterna. Giacché per lei non è possibile assumere un unico punto di vista per l'esplorazione e la descrizione, V. assume un sistema di riferimento egocentrico che le consente di aggiornare il flusso di informazioni spaziali in relazione ai suoi movimenti rispetto al cerchio (dentro e fuori dal cerchio). V., infatti, dice che lei assume una posizione esterna al cerchio ("fuori dal cerchio") mentre «P. non è come me, perché lui è dentro mentre io sono fuori». Quando però V. cerca di leggere la regolarità della forma in termini di distanza dei bambini dal centro, assume un sistema di tipo allocentrico e considera il centro come punto di riferimento privilegiato. V. dice, infatti: «P. è nel mezzo del cerchio» (la posizione di V., quindi, non è più presa come riferimento per definire la posizione di P. rispetto al cerchio). Ciò conferma che la scelta del punto di vista non è legata allo sviluppo cognitivo del bambino, come considerato per lungo tempo dalla teoria piagetiana ma, piuttosto, ai compiti che il bambino deve svolgere.

3.3 Sessione 3: i segni pivot "bastoni" e "centro"

Obiettivo dell'attività didattica, è trasformare il segno pivot "centro", legato al significato di "punto privilegiato", nel segno geometrico "centro di una circonferenza". Così, l'insegnante chiede ai bambini: «come possiamo essere sicuri che questo punto sia davvero al centro?». I bambini hanno a disposizione diversi artefatti: bastoni di legno della stessa lunghezza e di lunghezze diverse, birilli, vernice, pennelli, corda, blocchi di legno.
Riportiamo qui di seguito una parte di uno scambio verbale particolarmente interessante tra V., e l'insegnante, I., da cui è scaturita la definizione del nuovo segno pivot "bastone", adottato dall'intera classe, e che, al termine della discussione, è stato messo in relazione al raggio inteso e nominato come «uguale distanza dal centro».
Ricordiamo che, nelle sessioni precedenti, V. ha introdotto il termine "centro" collegato al significato di "punto privilegiato", e che l'insegnante vuole usarlo come segno *pivot*.

I.:« Come possiamo essere sicuri che questo punto sia veramente il centro?»

V.: «Dobbiamo misurare con i piedi cioè dobbiamo mettere un piede dietro l'altro [ci prova ma la figura del cerchio che ottiene non è soddisfacente per il fatto che i suoi compagni si muovono non tenendo la posizione]».

V. allora propone di usare i blocchi di legno, così ciascun compagno costruisce la propria distanza dal centro mettendo i blocchi uno accanto all'altro a partire dai piedi verso il centro. I blocchi, però hanno diversa lunghezza così le distanze dal centro non risultano tutte uguali, come nelle intenzioni di V. (**Figura 6**). Tutti si rendono conto di ciò e alcuni bambini usano ancora l'indice della mano per indicare che la forma non è rotonda anche se è chiusa.

Figura 6
Distanze dal centro definite con blocchi di legno di diversa dimensione.

V.: «Dobbiamo provare con i bastoni! [ciascun bambino prende un bastone e lo posiziona in modo che un estremo tocchi il centro e l'altro i piedi del bambino stesso]».

I.: «Ok bambini, che cosa avete fatto?»

R.: «Un cerchio fatto bene!»

I.: «Perché è fatto bene?»

V.: «Perché ci sono i bastoni tutti uguali e partono tutti dal punto che sta in mezzo! Siamo tutti distanti uguali [dal centro]» (**Figura 7**).

Figura 7
Distanze dal centro definite con bastoni di uguale lunghezza.

In questo stralcio, assistiamo ad una combinazione di movimento del corpo (per ottenere l'uguale distanza dal centro misurata, per esempio, mettendo un piede dopo l'altro), di gesti (con le dita per mostrare la forma rotonda e chiusa), di parole ("centro", "uguale distanza") e di disegni che rappresentano questo processo (Figura 8). La parola "bastoni" associata al significato di "uguale distanza" svolge il ruolo di segno *pivot*, perché rappresenta la definizione embrionale di "raggio" (Figura 7) attraverso il quale, insieme al segno *pivot* "centro", i bambini costruiranno l'idea di circonferenza.
I dati raccolti mostrano come tutti i bambini adottino il segno *pivot* "bastoni" quando l'insegnante chiede di rappresentare, su un foglio tondo, il cerchio di bambini (Figura 8).

Figura 8
Rappresentazione del cerchio di bambini che si tengono per mano.

Ciò che si ottiene non è, ovviamente, una costruzione in senso geometrico, ma possiamo riconoscere un'embrionale costruzione geometrica della circonferenza per gli invarianti considerati (punto centrale e bastoni).
Osserviamo anche come la rappresentazione ottenuta (Figura 8) abbia ancora il significato di una curva in senso statico, perché è ancora intesa come un insieme di punti, generata posizionando, uno dopo l'altro, i bambini. Qui è anche possibile identificare un'azione ripetuta che definisce un'associazione biunivoca fra bastone e bambino.
La consegna successiva ha come obiettivo quello di portare i bambini ad un salto di astrazione mantenendoli, però, nel micro-spazio rappresentativo del foglio. L'insegnante allora chiede di disegnare, su un foglio A4, "un cerchio perfetto", dove la parola "perfetto" può rimandare sia ad un semplice aspetto percettivo (cerchio tondo), sia alla relazione fra le invarianti della figura (centro e raggio).
I bambini disegnano un punto (di diverse dimensioni) e tracciano, a mano libera attorno ad essa una curva chiusa. I bambini dichiarano che il cerchio "è tutto storto" (Figura 9) enfatizzando come l'evidenza percettiva guidi ancora la costruzione così come la "lettura" del disegno.

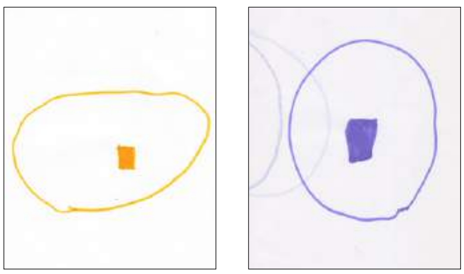


Figura 9
Esempi di cerchio tracciati a mano libera attorno ad un punto identificato come avente una posizione centrale.

I bambini stessi si pongono l'obiettivo di superare questo ostacolo evocando le ultime esperienze in giardino e in salone (**Figura 6** e **Figura 7**). I bambini ricordano le parole di V., che interviene direttamente dicendo: «si deve prendere la misura dal centro!». Così V. sceglie come unità di misura il tappo del pennarello che sta usando, e definisce quindi il raggio della stessa misura del tappo. Posiziona un estremo del tappo accanto al centro e con l'altro estremo traccia dei segni (**Figura 10**).

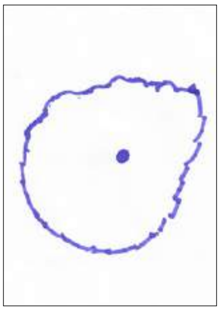


Figura 10
Cerchio tracciato da V. considerando come misura del raggio il tappo del pennarello.

Terminata l'operazione, V. sostiene che «ha fatto bene» (è possibile interpretare queste parole come l'espressione implicita della consapevolezza di aver seguito la definizione per la procedura di costruzione della figura) ma non è comunque soddisfatta perché «sembra un uovo, è ovale» (è possibile identificare in queste parole l'uso di criteri percettivi per validare il prodotto della procedura di costruzione). Così, i bambini stessi propongono di «mettere dei bastoncini dal centro per prendere la misura». Insieme all'insegnante, si concorda di realizzare i bastoncini con striscioline di carta della stessa lunghezza. Ogni bambino, partendo da un punto sul foglio, incolla i bastoncini colorati. Quando il bambino ritiene di aver incollato un numero di bastoncini sufficiente, traccia il cerchio con la matita unendo i punti estremi dei bastoncini (**Figura 11, 12**).
Molti bambini non riescono ad eseguire la consegna al primo tentativo, così l'insegnante decide di avviare una discussione collettiva dalla quale emerge che è necessario rifare il compito perché:

– non tutti i bastoncini di carta sono stati incollati a partire dal centro;
– non sono stati incollati un numero sufficiente di bastoncini di carta;
– non sono stati toccati con la matita tutti gli estremi dei bastoncini incollati per disegnare il cerchio.

La discussione porta i bambini a dire che il cerchio così ottenuto «non è venuto bene perché i punti [estremi dei bastoncini] non sono alla stessa distanza [dal centro]» (**Figura 12**).

Figura 11
Rappresentazione del cerchio con invarianti in tre dimensioni.

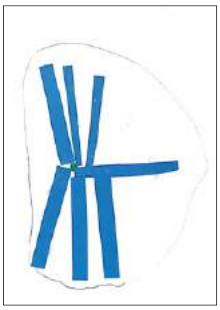


Figura 12
Mancata rappresentazione del cerchio con invarianti in tre dimensioni.

3.4 Sessione 4: la circonferenza come traccia dinamica

Per rendere esplicite le relazioni geometriche tra centro (posizione centrale), raggio (bastoni) e punti sulla circonferenza (bambini o estremi dei bastoncini colorati), l'insegnante chiede di disegnare un cerchio sul pavimento, mettendo a disposizione dei bambini diversi artefatti (Figura 13): un cono di plastica, una corda, un bastone, un pennello, della pittura ecc.

Figura 13
Artefatti a disposizione dei bambini per poter disegnare un cerchio sul pavimento della palestra.

Tutti i bambini concordano nell'avviare l'attività misurando distanze uguali a partire dal centro. A questo scopo, usano diverse unità di misura, più o meno efficaci: la bomboletta di vernice (posizionata in orizzontale sul pavimento), il bastone, il pennello; la curva, ottenuta con la corda, la distanza definita dal centro (in Figura 14 tramite la lunghezza del pennello), non produce un risultato soddisfacente perché non garantisce di mantenere "sempre la stessa distanza dal centro". Osserviamo che la curva mantiene ancora caratteristica di staticità.

Figura 14
Curva ottenuta usando il pennello come raggio a partire dal centro, identificato nel birillo. Per la rappresentazione della traccia, è usata la corda.

I bambini tornano all'analisi degli artefatti e decidono, autonomamente, di riutilizzare il materiale in modo diverso fissando un capo della corda al bastone centrato sul cono in plastica e l'altro capo al pennello (Figura 15). Immersa la punta del pennello nella pittura, i bambini iniziano a tracciare la curva che qui assume la caratteristica di dinamicità perché è la traccia di un punto che ruota attorno al centro. Non si riesce però a rispettare, come risulta evidente dalla **Figura 16** e dalla **Figura 17**, una condizione: mantenerne sempre la stessa distanza dal centro. Operativamente, cioè, la corda non viene mantenuta sempre tesa.

Figura 15
Un capo della corda è stato fissato al cono, che assume la posizione centrale, e l'altro capo al pennello.

Per questo, la traccia ottenuta non sembra rispondere alle condizioni di chiusura e regolarità che sono ancora le caratteristiche percettive sulla base delle quali i bambini sembrano validare i loro prodotti.

Figura 16 – 17
La traccia del cerchio ottenuta dinamicamente tramite pittura e pennello non rispetta le condizioni di chiusura e regolarità.

I bambini decidono allora, dopo una breve discussione, di tracciare una serie di punti sul pavimento (**Figura 18**, **Figura 19**) che consentono più facilmente di mantenere "tesa la corda" e, quindi, di mantenere sempre la stessa distanza dal centro. Questa rappresentazione ha ancora traccia delle esperienze precedenti, nelle quali i bambini prendevano il posto di questi punti. La successiva unione dei punti con una traccia continua (**Figura 19**, **Figura 20**) definisce però dinamicamente la curva come movimento del punto (punta del pennello) attorno al centro (cono).

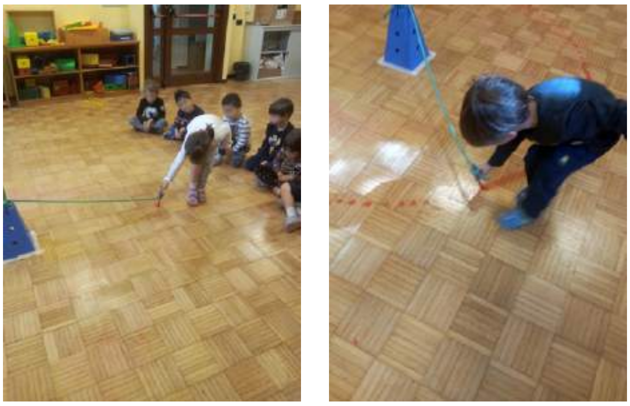


Figura 18 – 19
Rappresentazione di punti sul pavimento.

Figura 20
Unione dei punti con una traccia continua.

3.5 Sessione 5: definizione "pseudo-geometrica" di circonferenza

Come è facile osservare, le attività didattiche condotte fino a questo momento si sono sviluppate nel macro-spazio di realtà e nel micro-spazio rappresentativo del foglio dove, spesso, le interpretazioni delle configurazioni ottenute si sono basate su aspetti percettivi. Quindi, per fare in modo che la descrizione delle relazioni fra centro e raggio della circonferenza si avvalga sempre più di principi geometrici piuttosto che di criteri percettivi, si definiscono consegne che richiedono l'uso della verbalizzazione: lo spazio esperienziale dei bambini si allontana dall'uso di artefatti che producono segni artefatto (o segni situati) per avvicinarsi a segni sempre più matematici, afferenti cioè allo spazio geometrico.
A questo scopo, l'insegnante avvia la discussione seguente:

I.: «Se dovessimo spiegare ad altri bambini che cosa è un cerchio, voi, che cosa direste?»
R.: «Mettiamo un punto e mettiamo le righe, i bastoni, che sono tutti uguali».
I.: «E dove mettiamo i bastoni?»
R.: «Devono stare tutti alla stessa misura, non uno più lontano e uno più vicino!»
I.: «E da dove la prendiamo la misura?»
R.: «Dal punto che sta in mezzo, dal centro».
V.: «Prendiamo un punto, il centro, e mettiamo giù i bastoni, bastoni tutti uguali, che partono dal centro. Così prendiamo la stessa *misura*, la stessa *distanza* dal centro».
I.: «Quindi, cos'è un cerchio?»
F.: «È una cosa rotonda e ci sono tutte le linee uguali dal punto, dal centro».

Nella discussione è possibile identificare descrizioni procedurali che si avvalgono di segni *artefatto* in luogo di *segni geometrici*. Per esempio, nel suo intervento, R. fa riferimento ai bastoni «che sono tutti uguali» per riferirsi a raggi della stessa lunghezza, o ancora fa riferimento alla misura della lunghezza che però identifica anche una posizione: «[i bastoni] devono stare tutti alla stessa misura».
Così, per rispondere alla domanda dell'insegnante: «cos'è un cerchio?», R. descrive la procedura di costruzione del cerchio che identifica e caratterizza la forma - non ancora come figura geometrica - in termini percettivi. La percezione, qui, è dominante rispetto alla generalizzazione.
È possibile però identificare, nell'intervento di V., una descrizione procedurale più

strutturata: prendiamo un punto, chiamato centro, disponiamo i bastoni, che devono essere tutti uguali (della stessa lunghezza), a partire dal centro. V. giustifica la necessità di bastoni uguali e disposti tutti a partire dal centro, dicendo che in questo modo si ha la stessa misura a partire dal centro (in segni matematici, possiamo dire che viene descritto il significato di raggio). Le parole (segni situati) usate da V. assumono in modo incisivo il ruolo di segni *pivot* perché sanciscono il legame fra segni artefatto e segni geometrici. Se, infatti, le parole "righe" (in qualche modo legata più al mondo della rappresentazione che al mondo reale) e "bastoni" (che invece rimanda al mondo reale), presenti una accanto all'altra nel primo intervento di R., evidenziano il ruolo della parola "bastoni, che sono tutti uguali" come sinonimo di "uguale lunghezza/misura", senza definire una relazione esplicita con la posizione centrale, altre parole usate da V. nella descrizione della procedura di costruzione, passano dall'essere strettamente correlate all'esperienza materiale e percettiva (bastoni uguali, punto nel mezzo) all'essere più vicine alla generalizzazione geometrica (lunghezza, misura, distanza, centro). Così, nell'intervento di V. la parola "bastoni", per esempio, assume il ruolo di segno *pivot*, perché è esplicitamente legata alla "distanza dal centro" e, quindi, al raggio, attraverso la parola "misura".

La discussione si conclude quindi con la caratterizzazione della circonferenza che potrà essere comunicata ad altri bambini: «Un cerchio è un "rotondo" fatto di molti punti uniti che hanno la stessa distanza (la stessa misura) dal centro».
Abbiamo definito questa caratterizzazione come *pseudo-geometrica* perché si riferisce ancora a elementi percettivi legati alla forma ma in essa è comunque possibile identificare la natura dinamica della curva come traccia generata dal movimento del punto mantenuto alla stessa distanza dal centro. In particolare, osserviamo come la parola "rotondo" si riferisca allo spazio rappresentativo, dove cioè la percezione guida l'interpretazione della figura. Al contempo però, l'espressione "punti collegati fra loro che hanno la stessa distanza dal centro" evidenzia come la curva sia concepita in modo dinamico in termini di movimento del punto attorno al centro, mantenendo la stessa distanza da esso; qui è possibile riconoscere il significato embrionale di "raggio". Si riconoscono così gli invarianti e le loro relazioni che consentono di definire la circonferenza intesa come il luogo dei punti equidistanti dal punto denominato centro.

4 Discussione e conclusioni

Lo studio si è proposto di illustrare un percorso didattico svolto alla scuola dell'infanzia che ha condotto i bambini all'esplorazione del cerchio, dapprima in termini percettivi e, in seguito, in termini più astratti come figura vicina, ma non completamente isomorfa alla circonferenza, nella sua definizione geometrica. La figura in oggetto, per il livello scolare in cui si lavora, viene comunque sempre etichettata in termini di "cerchio".
Il percorso didattico è stato progettato e analizzato con il quadro concettuale della Mediazione Semiotica, che ha consentito di evidenziare come l'uso di diversi artefatti, la produzione di segni legati a questi artefatti e la loro trasformazione in segni matematici tramite la mediazione dell'insegnante, abbiano contribuito alla formula-

zione di ciò che abbiamo chiamato *pseudo-definizione* di circonferenza.

Da un punto di vista metodologico, la ricerca sembra aver mostrato il ruolo importante dell'approccio multimodale come approccio efficace per promuovere l'esplorazione di figure in senso geometrico. A tale scopo, alcuni aspetti cognitivi e alcune scelte didattiche sembrano aver giocato un ruolo chiave:

– La multimodalità, come approccio didattico, coinvolge aspetti percettivi e senso-motori e sfrutta quindi il corpo per plasmare il pensiero geometrico. Così, la costruzione di un cerchio di bambini o di blocchi di legno, associate alla richiesta della loro rappresentazione o della loro descrizione, sembrano giocare un ruolo fondamentale per lo sviluppo della concettualizzazione della circonferenza. Per questo, le attività sono state contestualizzate in diversi tipi di spazio: micro-spazio (foglio) e macro-spazio (palestra, giardino ecc.), in modo tale che, per soddisfare le richieste dell'insegnante, l'esplorazione dei bambini comportasse il cambiamento di sistema di riferimento e di punto di vista.
– A tale scopo, lo spostamento dal sistema *egocentrico*, che costituisce il riferimento delle prime esplorazioni, al sistema *allocentrico*, che costituisce il riferimento nelle descrizioni successive, sembra aver permesso ai bambini di identificare le invarianti della figura geometrica (centro e distanza dal centro-raggio) descrivendone le relazioni spaziali in modo indipendente dal soggetto.
– Questa transizione sembra essere favorita sia dalla varietà degli artefatti (blocchi di legno, bastoni, bambini stessi) sia dalla possibilità di discussione e confronto con i compagni sui segni prodotti (gesti, parole, movimenti del corpo, disegni ecc.) e sul loro legame con i segni geometrici. La richiesta di "descrivere ciò che si vede" (per esempio la consegna data a V.) impone una *contrazione semiotica* (Radford, 2006, p. 12), cioè una riduzione dei segni utili alla descrizione. In questo caso, la complessità del compito aumenta, perché si deve esprimere a parole qualche cosa di generale (la relazione fra le invarianti) che prima si poteva mostrare anche con i gesti o con gli oggetti. C'è, infatti, come afferma Radford (2006, p. 12), un profondo divario fra mostrare e dire. Qui i bambini, e prima ancora V., devono lavorare con un ridotto insieme di segni, intesi come forme espressive; così, per elaborare la generalizzazione che compensi la riduzione di risorse semiotiche, devono concentrare i significati in un numero inferiore di segni/parole (Radford, 2006, p. 12). Ora, anche se nessuna esperienza del percorso descritto è stata sviluppata in un modello di tipo strettamente geometrico, i bambini sembrano capaci di trattare visivamente le informazioni (Bishop, 1988) spostandosi dal linguaggio figurale ("rotondo", "rotondo chiuso", "bastoni" ecc.) supportato talvolta dal gesto, ad un linguaggio "pseudo-astratto" (punti aventi la stessa distanza dal centro, distanza dal centro, uguale lunghezza, misura, uguale misura), per definire, in un certo senso, ciò che Radford chiama *contextual generalization* (Radford, 2006). Esse sono generalizzazioni "contestuali" per il fatto che si riferiscono al contesto specifico e agli oggetti specifici anche se possiamo osservare come non facciano direttamente cenno a caratteristiche spazio-temporali. Per questo, abbiamo chiamato la definizione prodotta dai bambini una *pseudo-definizione* di circonferenza.
– I segni *pivot*, segni ponte fra segni artefatto e segni geometrici, hanno giocato un ruolo chiave nel passaggio da segni figurali a segni pseudo-geometrici. Così, per esempio, il segno *pivot* "centro" è passato dal significato di "posizione privilegiata all'interno del cerchio di [bambini o mattoni di legno …]" al significato

di "centro della circonferenza" (punto dal quale ciascuno dei punti alla circonferenza è equidistante). I segni *pivot* sono segni che vengono assunti dalla classe con un significato condiviso. Per esempio, il segno "bastoni" viene assunto dalla classe come segno di "uguale distanza dal centro" e viene trasformato, grazie alla mediazione dell'insegnante, nel segno geometrico "raggio".

L'esperienza quindi mostra come sia possibile riflettere in termini geometrici (o pseudo-geometrici) anche alla scuola dell'infanzia e mostra come l'approccio multimodale favorisca la costruzione di significati geometrici.

Ringraziamenti

Il percorso didattico raccontato in quest'articolo è il frutto del lavoro del gruppo di ricerca-azione EduMath Vallée[1], composto da una trentina di insegnanti valdostane della scuola elementare e della scuola dell'infanzia, che dal 2013 lavora in verticale per una didattica della matematica innovativa. Vorrei dunque ringraziare tutte le insegnanti del gruppo per il supporto dato a questa ricerca, ma un grazie particolare va alle insegnanti della scuola dell'infanzia che direttamente hanno sperimentato in classe il percorso e hanno raccolto e analizzato, insieme all'autrice, i dati: Roberta Duclos, Cristina Gay, Stefania Spina e Claudia Thiebat.

Bibliografia

Arzarello, F., Pezzi, G., & Robutti, O. (2007). Modelling body motion: an approach to functions using measuring instruments. In W. G. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: the 14th ICMI Study* (pp. 129–136). Boston MA: Springer US.

Bartolini Bussi, M. (2008). *Matematica. I numeri e lo spazio*. Azzano San Paolo: Junior.

Bartolini Bussi, M. G., & Baccaglini-Frank, A. (2015). Geometry in early years: sowing seeds for a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM Mathematics Education, 47*(3). doi:10.1007/s11858-014-0636-5.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 720-749). Mahwah: Erlbaum.

Bryant, P. (2008). Paper 5: understanding spaces and its representation in mathematics. In T. Nunez, P. Bryant, & A. Watson (Eds.), *Key understanding in mathematics learning: A report to the Nuffield Foundation*. Disponibile in http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/P5.pdf (consultato il 14.01.2019)

Bishop, A. J. (1988). Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

de Freitas, E., & Sinclair, N. (2013). New materialist ontologies in mathematics education: the body in/of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 83*(3), 453–470. doi: 10.1007/s10649-012-9465-z

1. EduMath Vallée è un progetto di ricerca-azione patrocinato dalla Sovrintendenza agli Studi della Regione Autonoma Valle d'Aosta. Il coordinatore scientifico del gruppo è l'autore del presente articolo.

Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology 22*, 455-479.

MIUR. (2012). Indicazioni Nazionali per il curriculo della scuola dell'infanzia e del primo ciclio d'istruzione.

Lakoff, G., & Nùñez, R. (2000). Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. New York: Basic Books.

Nemirovsky, R. (2003). Three Conjectures Concerning the Relationship between body activity and Understanding Mathematics. In N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 105-109). Hawaii: PME.

Owens, K. (2015). Visuospatial reasoning: An ecocultural perspective for space, geometry and measurement education. New York: Springer.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sái & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 2-21). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2014). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM, 46*(3), 349–361.

Radford, L., Edwards, L., & Arzarello, F. (2009). *Beyond words. Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 91-95.

Robotti, E. (2018). Geometry in kindergarten: first steps towards the definition of circumference. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 43-50). Umeå, Sweden.

Sinclair, N., & Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: the development of the routine of shape identification in dynamic geometry environments. *International Journal of Education Research, 51-52*, 28–44.

Autore/Elisabetta Robotti
Dipartimento di Matematica – Università di Genova, Italia
robotti@dima.unige.it